Une construction systématique de modèles à partir de spécifications opérationnelles structurelles

Eric Badouel

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 764

UNE CONSTRUCTION SYSTEMATIQUE DE MODELES A PARTIR DE SPECIFICATIONS OPERATIONNELLES STRUCTURELLES

Eric BADOUEL

DECEMBRE 1987

IRISA

INSTITUT DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
ET SYSTÈMES ALÉATOIRES

Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Téléphone : 99 36 20 00
Télex : UNIRISA 950 473 F
Télécopie : 99 38 38 32

Une construction systématique de modèles à partir de spécifications opérationnelles structurelles

Eric BADOUEL
IRISA
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex

Publication Interne n° 381 - Novembre 87 - 40 pages.

Résumé

Prenons comme point de départ une axiomatisation de la sémantique opérationnelle de programmes réactifs utilisant le formalisme introduit par G. Plotkin ; il lui correspond de façon implicite un modèle de ce langage. En effet ces règles permettent d' interpréter les agents (termes clos du langage) comme des systèmes de transitions et les opérateurs de l'algèbre des termes comme des mécanismes réalisant la coopération de tels systèmes de transitions.
Dans une première étape nous allons, pour toute une classe d'algèbre de termes et de sémantiques opérationnelles de ces termes, expliciter ce modèle initial. Un calcul y sera représenté par la suite des arbres de preuve de ses transitions et un processus par l'ensemble de ses calculs maximaux . Nous montrons qu'il est possible de déduire l'interprétation d'un tel langage dans ce modèle à partir de ses définitions opérationnelles (compte tenu de certaines hypothèses faites sur ces définitions).
De ce modèle initial on en dérive un modèle observationnel en remplaçant les arbres de preuve par les actions qu'ils induisent tout en conservant la structure arborescente des processus. On montre que ce second modèle peut également se déduire des définitions opérationnelles. Dans ce modèle dit *fondamental* toutes les propriétés des exécutions de programmes sont conservées on pourra donc songer à en dériver d'autres modèles par emploi systématique de morphismes de modèles (correspondant à diverses notions d'observables).

A systematic construction of models from structural operational specifications

Abstract

Let us take as a starting point the axiomatic formalism introduced by G. Plotkin for defining the operational semantics of programming languages for reactive systems. We claim that the axiomatic description of a programming language induces an equivalent denotational model for it. As a matter of fact, the closed terms (i.e. programs) of a term algebra may be interpreted as transition systems and the operators on the algebra may be interpreted as operators on transition systems, realising the cooperation between their arguments as it is specified in the operational rules.
We first explicit that initial model for a whole class of term algebras and operational definitions . A computation is there a sequence of proof trees, each of them proving an elementary transition, and a process is the set of all its maximal computations. We show how this model can be derived from the operational definitions.
From that initial model we derived an observational model through an erasing morphism ; this second model is also derived from the structural operational specifications.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
(L. A. 227)
UNIVERSITÉ DE RENNES 1 I. N. S. A. DE RENNES

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE
EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE
(LABORATOIRE DE RENNES)

Table des matières

PAPIER RÉCUPERÉ ET RECYCLÉ

1 INTRODUCTION

Le but du travail entrepris ici est de systématiser la démarche qui va de la définition opérationnelle d'un langage de programmation à un modèle pleinement abstrait de ce langage. Ce rapport lié au travail de Philippe Darondeau et Boubakar Gamatié ([DG87a] et [DG87b]) présente une méthode systématique permettant de dériver un modèle initial puis un modèle observationnel à partir des spécifications opérationnelles structurelles d'un langage de programmation.
Suivant la voie ouverte par Scott et Strachey nous définissons des domaines sémantiques par le biais de constructions standards telles les constructions de produits cartésiens, d'espaces de fonctions et d'ensembles de parties ; puis nous spécifions la signification d'un terme par induction sur sa structure. Il nous reste alors à établir que le modèle dénotationnel ainsi construit correspond aux définitions opérationnelles qui procurent le critère d'adéquation.
On trouve ainsi de nombreuses références dans lesquelles les auteurs s'attachent à établir un lien entre le comportement d'un programme et sa dénotation dans un modèle donné. Certains à la façon de Plotkin dans [Plo77] considèrent que la sémantique opérationnelle peut, dans une certaine mesure, être déterminée par la sémantique dénotationnelle. De telles approches mettent l'accent sur la calculabilité en considérant, par exemple, des domaines effectifs. A l'opposé l'approche préconisée par Milner [Mil80] consiste a fonder une notion de processus à partir de la sémantique opérationnelle. Suivant cette dernière approche nous prenons comme point de départ une axiomatisation de la sémantique opérationnelle de programmes réactifs utilisant le formalisme introduit par G. Plotkin [Plo81]. Ce formalisme consiste en *spécifications opérationnelles structurelles* qui définissent un langage constitué de transitions $t \xrightarrow{\alpha} t'$ ayant la signification suivante : le programme t peut effectuer l'action α et se reconfigurer en t' à la suite de cette action. Nous affirmons qu'il correspond à la définition axiomatique d'un langage un modèle dénotationnel équivalent. En effet les programmes (termes clos du langage) s'interprètent comme des systèmes de transitions et les opérateurs du langage comme des opérateurs qui réalisent la coopération entre des systèmes de transitions arguments tel que cela est spécifié par les règles opérationnelles.
Dans une première étape nous allons, pour toute une classe d'algèbre de termes et de sémantiques opérationnelles de ces termes, expliciter ce modèle initial. Un calcul y sera représenté par la suite des arbres de preuve de ses transitions et un processus par l'ensemble de ses calculs maximaux . Nous montrons qu'il est possible de déduire ce modèle des spécifications opérationnelles structurelles. Dans la mesure où notre construction repose entièrement sur la topologie métrique et fait appel au théorème de point fixe de Banach, nous sommes, à la façon de de Bakker et al ([dBZ82], [dBMO85], [dBK85]) conduits à poser des hypothèses analogues aux hypothèses de Greibach sur les grammaires algébriques afin d'assurer que les opérateurs servant à notre construction soient contractants. Par exemple, nous utilisons un symbole d'action spécifique σ pour représenter le dépliage d'une définition récursive.
D'un point de vue observationnel le sens d'un programme se réduit à son comportement tel qu'il puisse être perçu par un observateur extérieur. Une telle perception correspond à une image morphique du modèle initial précédemment défini. Un morphisme d'observation doit être indifférent au *pourquoi* et au *comment* des transitions et actions ; en d'autres mots, il doit pouvoir se factoriser par le morphisme d'observation fondamental qui remplace les arbres de preuves par les actions qu'ils induisent tout en conservant la structure arborescente des processus. Nous construisons ce modèle fondamental de la manière suivante : on définit d'abord une application $\mathcal{E}_{ff}$ allant du domaine opérationnel $\mathcal{P}$ correspondant au modèle initial vers un domaine observationnel P ; nous dérivons des spécifications opérationnelles structurelles un modèle ayant P comme domaine et montrons que $\mathcal{E}_{ff}$ est un morphisme de modèles.
Afin de répondre aux deux objectifs que nous nous sommes fixés :

- dériver un modèle initial à partir des spécifications opérationnelles structurelles
- dériver de ce modèle initial un modèle observationnel par le biais d'un morphisme d'effacement

nous introduisons deux catégories. La catégorie $\mathcal{C}$ va nous permettre de définir l'ensemble des processus comme solution d'une équation de domaine. Un foncteur $\mathcal{F}$ de cette catégorie peut être considéré comme une *définition itérative* des processus. L'ensemble noté $\mathbf{Y}\mathcal{F}$ est obtenu par une construction de point fixe en itérant $\mathcal{F}$ à partir d'un domaine indéfini ; cette construction procure, ce faisant, une suite d'approximations du domaine construit. La seconde catégorie notée $\mathbf{K}$ va nous permettre de manipuler une classe de morphismes de modèles que nous pouvons qualifier de *morphismes itératifs*. En effet, dans cette catégorie nous pouvons associer des définitions itératives de processus (i.e. des foncteurs de $\mathcal{C}$) par paires ; de façon plus précise, une transformation naturelle $\tau : \mathcal{F}_1 \dot{\rightarrow} \mathcal{F}_2$ dans $\mathcal{C}$ va donner naissance à un foncteur de $\mathbf{K}$ et apparait comme une *définition itérative* d'un morphisme entre les domaines limites $\mathbf{Y}\mathcal{F}_1$ et $\mathbf{Y}\mathcal{F}_2$, celui-ci étant obtenu comme limite de ses restrictions successives sur la suite croissante des paires d'approximations de $\mathbf{Y}\mathcal{F}_1$ et $\mathbf{Y}\mathcal{F}_2$.

2 Notions de processus

2.1 Calculs et processus

2.1.1 Calculs

Nous verrons que l'ensemble des définitions opérationnelles structurelles équivaut à la donnée d'un ensemble AR_P d'arbres de preuve et d'une fonction partielle **trans** définie sur cet ensemble et qui précise pour chaque arbre de preuve la transition qu'il prouve. Nous allons, ici, définir les calculs non comme des suites de transitions valides mais plutôt comme les suites d'arbres de preuve qui leur correspondent.

définition : L'ensemble des calculs est $Cal = Cal_* \cup Cal_*.\bot \cup Cal_\omega$ où :

- l'ensemble Cal_* des **calculs finis** est défini par :
  $Cal_* = \{c =< t, (A_n)_{1\leq n\leq l(c)} >; A_n \in \mathrm{AR\_P}$ tel que $trans(A_n) = t_n \xrightarrow{\alpha_n} t_{n+1}$ et $t_1 = t\}$
  l(c) s'appelle la longueur du calcul c, les calculs vides (de longueur 0) sont notés $< t, \epsilon >$ ou encore ϵ_t
- $Cal_*.\bot$ est l'ensemble des **calculs non finis** ; $\bot$ est un caractère spécial et . désigne la concaténation sur le monoïde $(\mathrm{AR\_P} \cup \{\bot\})^*$; $\epsilon_t.\bot$ sera noté $\bot_t$. La longueur d'un tel calcul est définie par : $l(c.\bot) = l(c)$ en particulier $l(\bot) = 0$.
- l'ensemble des **calculs infinis** Cal_ω est défini par :
  $Cal_\omega = \{c =< t, (A_n)_{n\in\mathbf{N}^*} >; A_n \in \mathrm{AR\_P}$ tel que $trans(A_n) = t_n \xrightarrow{\alpha_n} t_{n+1}$ et $t_1 = t\}$

t_1 est appelé origine du calcul c; et si $n \leq l(c)$ on note $c(n) = A_n$.
On définit un ordre partiel sur l'ensemble des calculs appelé *ordre préfixiel* par :
$c_1 \leq_{Pr} c_2$ ssi $c_1 =< t, m_1 >$, $c_2 =< t, m_2 >$ et $\exists m_3 \in (\mathrm{AR\_P} \cup \{\bot\})^*$ tel que $m_1.m_3 = m_2$
note : les seuls calculs non maximaux pour cet ordre sont les calculs finis
On définit la *racine* d'un calcul par :

$$\mathbf{rac}(c) = \begin{cases} c' & \textbf{si} \quad c = c'.\bot \\ c & \textbf{si} \quad c \in Cal_* \cup Cal_\omega \end{cases}$$

on peut alors munir Cal de l'ordre suivant :

$$c_1 \leq c_2 \text{ ssi } \begin{cases} \text{si } c_1 \text{ est fini ou infini} & : \quad c_1 = c_2 \\ \text{si } c_1 \text{ est non fini} & : \quad \mathbf{rac}(c_1) \leq_{Pr} c_2 \end{cases}$$

on définit la *section d'ordre n* d'un calcul c par :

$$c[n] = \begin{cases} c & \textbf{si} \quad l(c) < n \\ c'.\bot & \textbf{si} \quad l(c) \geq n \text{ avec } c' \leq_{Pr} c \text{ et } l(c') = n \end{cases}$$

On munit Cal de la distance suivante :

$$d(c_1,c_2) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si}\, c_1 = c_2 \\ 1 & \text{si}\, c_1 = \epsilon_{t_1} \text{ et } c_2 = \epsilon_{t_2} \text{ avec } t_1 \neq t_2 \\ 2^{-\min\{n/c_1(n)\neq c_2(n)\}} & \text{sinon} \end{cases}$$

la propriété suivante est immédiate :
Propriété : *Toute chaîne de* $(Cal,\leq)$ *admet une borne supérieure et* (Cal,d) *est un espace métrique complet.*

Un calcul c est dit **maximal** s'il est maximal pour l'ordre préfixiel c'est à dire :
$c \leq_{Pr} c' \Rightarrow c = c'$ ainsi que pour l'ordre $\leq$ ce qui revient à dire : $c \in Cal_* \cup Cal_\omega$. On note Cal_m l'ensemble des calculs maximaux.

Si $t \in$ d-Termes on définit sa *valeur opérationnelle* par :
$\|t\|_{op} \;= < t, \{c \in Cal_m \;/\; \textbf{origine}(c) = t\} >$

2.1.2 ensemble des processus

Définition : L'ensemble P_r des *processus* est l'ensemble des parties non vides p de Cal vérifiant :

- p est plat : $\forall c_1, c_2 \in p \;\; c_1 \leq c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$
- $\forall c_1, c_2 \in p \;\; c_1 \leq_{Pr} c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$
- p est *fermé* : $\forall c \in Cal_\omega \;\; [(\forall n \in \mathbf{N}\; \exists c_n \in p \,.\, c[n] \leq c_n) \Rightarrow c \in p]$
  (en dehors des calculs infinis tous les calculs sont des points isolés de cet espace métrique la condition précédente exprime donc que p est un fermé pour la topologie métrique et cela signifie également que $\mathbf{Pref}(p) = \{c \in Cal \;/\; \exists c' \in p \,.\, c \leq c'\}$ est un fermé pour la topologie de Scott)
- tous les calculs de p ont la même origine : $\forall c_1, c_2 \in p$ $\;\textbf{origine}(c_1) = \textbf{origine}(c_2)$

remarques :

- on a choisit de définir un processus comme l'ensemble des *calculs maximaux* qui lui correspondent, en particulier si $\perp_t \in p$ alors $p = \{\perp_t\}$ on note Ω_t ce processus.
- si c est un calcul fini de p :$c \in p \cap Cal_*$ il ne doit se trouver aucun calcul dans p qui le prolonge ; en particulier si $\epsilon_t \in p$ alors $p = \{\epsilon_t\}$.

Si A $\in$ AR_P et p $\in P_r$ le *résidu de* p *par* A noté A∘p est défini comme suit :
A∘p=$\{c \in Cal_d / \; \exists c' \in A \diamond p$ tel que l(c)=l(c')-1 et $\forall n \,.\; 1 \leq n \leq$l(c) $c(n) = c'(n+1)$ $\}$
où A⋄p est l'ensemble des calculs de p qui commencent par A c'est à dire :
A⋄p = {c ∈ p / l(c) ≥1 et c(1)=A }

- **exemple** : si p={AD ; AEA ; B ; C⊥ } alors [1]
  A∘p={D ; EA } ; B∘p=$\{\epsilon_t\}$ avec t=**résultat**(B) ; C∘p=$\{\perp_{t'}\}$ avec $t' =$ **résultat**(C) ; D∘p=∅
- **remarques :**
  - si p=$\{\epsilon_t\}$ alors $\forall A \in$ AR_P A∘p = ∅

[1] Les applications partielles suivantes sont définies pour les mêmes valeurs que **trans** par :
si **trans**(A)=$t_1 \xrightarrow{\alpha} t_2$ alors **sujet**(A)=t_1, **compt**(A)=α et **résultat**(A)=t_2

– si A∘p $\neq \emptyset$ alors A∘p $\in \mathcal{P}_r$ et **origine(A ∘ p) = résultat(A)**.

Chaque processus peut se représenter sous la forme d'un arbre déterministe tel que à chaque élément A de AR_P tel que A∘p$\neq \emptyset$ corresponde une branche étiquettée par A et le sous arbre issu de cette branche est celui qui représente A∘p.

L'opération de préfixage est définie par :
$<A,p> = \{ c \in Cal \ / \ \exists c_1 \in p \ . \ l(c)=l(c_1)+1$ et $c(1)=A$ et $\forall n \ . \ 2 \leq n \leq l(c) \ c(n)=c_1(n-1) \}$
remarque : si **origine(p)** $\neq$ **résultat(A)** alors $< A, p >= \emptyset$ sinon $< A, p >\in \mathcal{P}_r$.

2.1.3 ordre sur $\mathcal{P}_r$

Intuitivement on souhaite que $p_1 \leq p_2$ si on peut obtenir p_2 à partir de p_1 en remplaçant certaines occurrences des éléments Ω_t dans p_1 par des éléments de $\mathcal{P}_r$ d'origine t. Cela correspond à l'extension de Egli-Milner de l'ordre défini sur les calculs :

$$p_1 \leq p_2 \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l} \forall c_1 \in p_1 \, \exists c_2 \in p_2 \ . \ c_1 \leq c_2 \\ \forall c_2 \in p_2 \, \exists c_1 \in p_1 \ . \ c_1 \leq c_2 \end{array}$$

Proposition 1 : *Toute chaîne de $(\mathcal{P}_r, \leq)$ admet une borne supérieure .*

Lemme : *Toute chaîne (i.e. tout ensemble totalement ordonné) contient une partie dense qui soit bien ordonnée.*

On rappelle qu'une partie E dense (ou cofinale) d'un ensemble ordonné F est une partie de F vérifiant : $\forall f \in F \ \ \exists e \in E$ tel que $f \leq e$.
Preuve du lemme
D'après le théorème de Zermelo tout ensemble peut être muni d'un bon ordre on peut donc écrire : $\mathcal{C} = \{A^\alpha \ / \ \alpha \in I\}$ où I est un ensemble bien ordonné. On note $\leq_I$ l'ordre sur I . On définit la partie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ qui répond aux conditions du lemme de la façon suivante :

$$A^\alpha \in \mathcal{C}' \quad \text{ssi} \quad \forall \beta \in I \, (\beta <_I \alpha \ \Rightarrow \ A^\beta < A^\alpha)$$

- *$\mathcal{C}'$ est dense dans $\mathcal{C}$*
  Supposons qu'il existe un élément A^{α_0} de $\mathcal{C}$ qui ne possède pas de majorant dans $\mathcal{C}'$ et donc en particulier il n'est pas élément de $\mathcal{C}'$ ce qui entraine : $\exists \alpha_1 <_I \alpha_0$ tel que $A^{\alpha_0} \leq A^{\alpha_1}$. A^{α_1} ne doit pas être élément de $\mathcal{C}'$ on peut réitérer ce procédé et obtenir ainsi une suite $(\alpha_n, n \in \mathbf{N})$ strictement décroissante dans I ce qui contredit le fait que I soit bien ordonné.
- *$\mathcal{C}'$ est bien ordonné*
  Si A^α et A^β sont deux éléments de $\mathcal{C}'$ tels que $\beta <_I \alpha$ nécessairement $A^\beta <_* A^\alpha$ car sinon A^α ne pourrait être élément de $\mathcal{C}'$. Ainsi $\mathcal{C}'$ muni de l'ordre induit de celui de $\mathcal{C}$ est isomorphe à une partie d'un ensemble bien ordonné et est donc bien ordonnée elle même

Le résultat suivant prouve, par conséquent, la proposition :
I étant un ordinal au moins égal à 1 ; toute suite croissante $(p_i)_{1 \leq i \leq I}$ d'éléments de $\mathcal{P}_r$ admet dans $\mathcal{P}_r$ une borne supérieure qui est : $p = \{ \mathbf{sup}_i(c_i) \ / \ (c_i)_{i \in I} \in S_I \}$
tel que pour tout ordinal α inférieur à I :

$$S_\alpha = \bigcup_{\beta \leq \alpha} S_\alpha^\beta \quad \textit{avec} \quad S_\alpha^\beta = \{(c_i)_{\beta \leq i \leq \alpha} \ ; \ \textit{croissante telle que} \ \forall i \in [\beta, \alpha] \ c_i \in p_i\}$$

1^{ere} **partie : p** $\in \mathcal{P}$

- **p est non vide**
  En effet on peut construire par récurrence transfinie un élément de S_I à partir d'un élément de p_0 (celui-ci étant non vide).
  Pour cela posons $H(\alpha)$ l'hypothèse suivante : "*toute chaîne de S_β pour $\beta < \alpha$ peut se prolonger en une chaîne de S_α*" et montrons $H(\alpha)$ pour tout α dans [1,I] . Soient par conséquent $\alpha \in [1, I]$ tel que $\forall \gamma < \alpha \quad H(\gamma)$ et $c = (c_i)_{\beta_0 \leq i \leq \beta} \in S_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

  - 1[ere] **étape** : on peut prolonger c en $(c_i)_{\beta_0 \leq i < \alpha}$ telle que $\forall i \in [\beta_0, \alpha[\quad c_i \in p_i$.
    En effet d'apres l'axiome de la chaîne il existe une chaîne maximale (au sens de l'ordre : $c_1 \sqsubseteq c_2$ signifie que c_1 se prolonge en c_2) prolongeant c ; puisqu'elle est maximale son ensemble d'indices doit d'apres les hyothèses contenir chacun des intervalles $[\beta_0, \gamma]$ pour $\gamma < \alpha$ et donc leur réunion c'est à dire $[\beta_0, \alpha[$.
  - 2[eme] **étape** on prolonge alors cette chaîne en un élément de S_α.

    * 1[er] **cas** : *cette chaîne est stationnaire*
      c'est à dire $\exists i_0 \forall i \geq i_0 \;\; c_i = c_{i_0}$; mais puisque $p_{i_0} \leq p_\alpha$ celui-ci contient un élément c_α supérieur à c_{i_0}.
    * 2[eme] **cas** : *cette chaîne n'est pas stationnaire*
      elle converge alors vers un élément $c_\infty \in Cal_\omega$ et $\forall n \in \mathbf{N}\; \exists i_n$ tel que $c_{i_n} \geq c_\infty[n]$ or $p_{i_n} \leq p_\alpha$ donc $\exists c'_n \in p_\alpha$ tel que $c_{i_n} \leq c'_n$ et donc $c_\infty[n] \leq c'_n$. p_α étant **fermé** on en déduit $c_\infty \in p_\alpha$.

- **Soient** c_1 **et** c_2 **deux éléments de p tels que** $c_1 \leq c_2$
  On a $c_1 = \mathbf{sup}_i(c_{1,i})$ et $c_2 = \mathbf{sup}_i(c_{2,i})$ où $(c_{1,i})_i$ et $(c_{2,i})_i$ sont deux éléments de S_I.

  $$\{c_{1,i}; i \in I\} \cup \{c_{2,i}; i \in I\} \;\subset\; \mathbf{Pref}(c_2) \stackrel{def}{=} \{c \in Cal_d / c \leq c_2\}$$

  $\mathbf{Pref}(c_2)$ est un ensemble totalement ordonné. Ainsi $\forall i \in I \; c_{1,i}$ et $c_{2,i}$ sont comparables et donc égaux (car p_i est plat). Et donc $c_1 = c_2$

- **Soient** c_1 **et** c_2 **deux éléments de p tels que** $c_1 \leq_{Pr} c_2$
  On a $c_1 = \mathbf{sup}_i(c_{1,i})$ et $c_2 = \mathbf{sup}_i(c_{2,i})$ où $(c_{1,i})_i$ et $(c_{2,i})_i$ sont deux éléments de S_I.

  - Si $c_1 \notin Cal_*$ alors nécessairement $c_1 = c_2$.
  - Si $c_1 \in Cal_*$ la suite $(c_{1,i})_i$ est donc stationnaire à partir d'un rang i_1.
    * Si la suite $(c_{2,i})_i$ est stationnaire à partir d'un rang i_2 alors si i=$\mathbf{max}(i_1, i_2)$ $c_{1,i} = c_1$ et $c_{2,i} = c_2$. Puisque p_i est un processus $c_{1,i} \leq_{Pr} c_{2,i}$ entraîne $c_{1,i} = c_{2,i}$ et donc $c_1 = c_2$.
    * Si la suite $(c_{2,i})_i$ n'est pas stationnaire alors $c_2 \in Cal_\omega$ et il existe un rang j qu'on peut supposer supérieur à i tel que $c_1 \leq_{Pr} c_{2,j} \leq c_2$ et donc $c_1 = c_{1,j} \leq_{Pr} c_{2,j}$. Puisque p_j est élément de $\mathcal{P}_r$ on a $c_{1,j} = c_1 = c_{2,j}$ et donc $c_1 \leq c_2$ ce qui est impossible car $c_1 \in Cal_*$ et $c_2 \in Cal_\omega$.

- Il est clair que tous les calculs de p ont la même origine.

- **p est fermé**
  Soit c un élément de Cal_ω tel que $\forall n \in \mathbf{N} \;\; \exists c_n \in p$ tel que $c[n] \leq c_n$. Ainsi $c_n = \mathbf{sup}_k(c_{n,k})$ où $(c_{n,k})_k$ est un élément de S_I . remarquons que p contient tous les calculs finis et infinis des p_k donc s'il existe un indice k tel que $c \in p_k$ alors $c \in p$. Puisque $c_{n,k} \leq c_n$ et $c[n] \leq c_n$ ces deux éléments $c_{n,k}$ et c[n] sont comparables, deux cas sont donc possibles :

  - ou bien $\exists p \in \mathbf{N}^* \;\; \exists k \in I \;\; \forall n > p \;\; c[n] \leq c_{n,k}$
    alors puisque p_k est fermé $c \in p_k$ et donc $c \in p$.

– **ou bien** $\forall p \in \mathbf{N}^* \ \forall k \in I \ \exists n > p \ c_{n,k} \leq c[n]$
On utilise l'hypothèse avec $p_1 = 0$ et donc $\forall k \in I \ \exists n_1 > 0 \ c_{n_1,k} \leq c[n_1]$ en particulier $c_{n_1,1} \leq c[n_1]$.
On utilise alors l'hypothèse avec $p_2 = n_1$ et donc $\forall k \in I \ \exists n_2 > n_1 \ c_{n_2,k} \leq c[n_2]$ en particulier $c_{n_2,2} \leq c[n_2]$ mais puisque $p_1 \leq p_2$ il existe un élément c_1 de p_1 tel que $c_1 \leq c_{n_2,2}$; c_1 et $c_{n_1,1}$ sont deux éléments de p_1 inférieurs à $c[n_2]$ ils sont, par conséquent, comparables et donc égaux (car p_1 est plat). Ainsi $c_{n_1,1} \leq c_{n_2,2}$. On réitère ce procédé pour construire une suite croissante $(c_{n_k,k})_k$ telle que $c_{n_k,k} \in p_k$ et $c_{n_k,k} \leq c[n_k]$ où $(n_k)_k$ est une suite strictement croissante d'entiers. Et donc $c = \sup_k(c_{n_k,k}) \in p$.

2^{eme} partie : p est la borne supérieure des p_i où $i \in I$

- **p est un majorant des p_i**

  – Soient un indice i_0 et c' un élément de p_{i_0}. On construit une suite $(c_i)_{i_0 \leq i \leq I}$ de S_I telle que $c_{i_0} = c'$ par récurrence transfinie de la même façon que précédemment. Et ainsi $c' = c_{i_0} \leq c = \sup_i(c_i) \in p$. Et donc $\forall c' \in p_i \ \exists c \in p$ tel que $c_i \leq c$.

  – Soit $c \in p$ alors il existe une suite $(c_i)_i$ de S_I telle que $c = \sup_i(c_i)$ et donc $c \geq c_i$.
  Ainsi $\forall c \in p \ \exists c_i \in p_i$ tel que $c_i \leq c$.

- **soit q un autre majorant des p_i**

  – **soit** $c \in q$
  $\forall i \in I \ \exists c_i \in p_i$ tel que $c_i \leq c$. Soient j et k deux indices de I tels que $j \leq k$ puisque $p_j \leq p_k$ on en déduit $\exists c' \in p_j$ tel que $c' \leq c_k$. c_j et c' sont tous les deux inférieurs à c donc comparables. p_j étant plat $c_j = c'$ et donc $c_j \leq c_k$. Ainsi $(c_i)_i \in S_I$ et par conséquent $c \geq \sup_i(c_i) \in p$.
  Donc $\forall c \in q \ \exists c_p \in p$ tel que $c_p \leq c$.

  – **soit** $c \in p$
  $c = \sup_i(c_i)$ où $(c_i)_i$ est un élément de S_I. $p_i \leq q$ et donc $\exists c_i' \in q$ tel que $c_i \leq c_i'$.

    * Si $c \in Cal_\omega$
    $\forall n \in \mathbf{N} \ \exists k_n$ tel que $c[n] \leq c_{k_n} \leq c'_{k_n}$; q étant fermé $c \in q$.
    * Si $c \notin Cal_\omega$
    La suite $(c_i)_i$ est stationnaire à partir d'un certain rang j et donc c=$c_j \leq c_j'$.

  Dans les deux cas : $\exists c' \in q$ tel que $c \leq c'$.

Donc p est bien le plus petit des majorants de $(p_i)_i$.

remarque : L'hypothèse de fermeture des processus est indispensable pour assurer l'existence d'un plus petit majorant comme l'illustre l'exemple suivant :
Soit la suite $(p_i)_i$ définie comme suit : $p_n = \{c_{n,k}.\perp / 0 \leq k \leq n\}$ avec $c_{0,0} = \epsilon$ et

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad c_{n+1,n+1} = c_{n,n}.A_{n+1,n+1}$

- $\forall n \in \mathbf{N} \ \forall k \ 0 \leq k \leq n \quad c_{n+1,k} = c_{n,k}.A_{n+1,k}$

On définit successivement $c_{\infty,n} = \sup_k(c_{k,n})$; $c_{\infty,\infty} = \sup_k(c_{k,k})$; $q = \{c_{\infty,n}/n \in \mathbf{N}\}$ et $p = q \cup \{c_{\infty,\infty}\}$; p et q sont alors deux majorants non comparables des p_i (mais q n'est pas fermé).

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
p_0 & p_1 & p_2 & & p_n & p_{n+1} & & p \\
\perp \arrow[r] \arrow[dr] & A_{1,0}.\perp \arrow[r] & A_{1,0}.A_{2,0}.\perp & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & c_{\infty,0} \\
& A_{1,1}.\perp \arrow[r] \arrow[dr] & A_{1,1}.A_{2,1}.\perp & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & c_{\infty,1} \\
& & A_{1,1}.A_{2,2}.\perp & \cdots & \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & c_{\infty,2} \\
& & & \ddots & & & & \\
& & & & c_{n,n} \arrow[r] \arrow[dr] & c_{n+1,n} & \cdots & c_{\infty,n} \\
& & & & & c_{n+1,n+1} & \cdots & c_{\infty,n+1} \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & c_{\infty,\infty}
\end{tikzcd}
$$

2.1.4 Distance sur $\mathcal{P}_r$

On définit une distance ultramétrique sur $\mathcal{P}_r$ par :

$$
\begin{aligned}
d(p_1, p_2) &= 0 & \text{si } p_1 = p_2 \\
&= 2^{-\min\{n \,/\, p_1[n] \neq p_2[n]\}} & \text{sinon}
\end{aligned}
$$

où p[n]={c[n] / c∈p }.

On dit qu'une suite (u_n) est une *suite de sections* si :
$\forall n, m \in \mathbf{N}\ \ n \leq m \Rightarrow u_n = u_m[n]$
ce qui équivaut de façon claire à la condition : $\forall n \in \mathbf{N}\ u_n = u_{n+1}[n]$ ou encore à :
$\forall n \in \mathbf{N}\ d(u_n, u_{n+1}) < 2^{-n}$.
La propriété qui suit justifie cette appelation :
Propriété : *si (u_n) est une suite de sections alors elle admet une borne supérieure u et :*

- $u_n = u[n]$
- $\lim_{n\to\infty} u_n = u$

On voit ainsi que pour de telles suites la limite pour la convergence métrique coïncide avec la borne supérieure de ses éléments. Le cas d'une suite de Cauchy peut s'y ramener grâce à la définition suivante :
Définition : Si $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{P}_r$ on appelle *régulateur de convergence* de cette suite l'application ψ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définie par : $\psi(n)$ est le plus petit entier tel que $\forall p \geq \psi(n)\ \forall q \geq \psi(n)\ d(a_p, a_q) < 2^{-n}$ et la suite $\mathbf{Dir}(\alpha) = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $b_n = a_{\psi(n)}[n]$ constitue la *direction* de la suite α.

Propriété : *si $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{P}_r$ sa direction est une suite de sections et α converge vers la limite de sa direction*
Preuve :

- Il découle de sa définition que ψ est croissante et que tous les éléments a_p correspondant à des indices supérieurs à $\psi(n)$ ont la même section d'ordre n. En particulier si n<m :
$b_n = a_{\psi(n)}[n] = a_{\psi(m)}[n] = (a_{\psi(n)}[m])[n] = b_m[n]$
La direction de α est donc bien une suite de sections.
- Soit b = $\mathbf{sup}_n(b_n)$ sa borne supérieure. On a d'une part $\forall p \geq \psi(n)\ b_n = a_p[n]$ et donc $d(b_n, a_p) < 2^{-n}$ et d'autre part $b_n = b[n]$ et donc $d(b_n, b) < 2^{-n}$ la distance étant ultramétrique on en déduit que $d(a_p, b) \leq \mathbf{max}\{d(a_p, b_n), d(b_n, b)\} < 2^{-n}$

Et ainsi :
Proposition 2 : *$\mathcal{P}_r$ est un espace métrique complet*

remarques : A toute suite de Cauchy on peut donc associer une suite croissante et qui a la même limite qu'elle. Par exemple si $p_n = \{ A^n.\mathrm{B} \}$ on a $\mathbf{Dir}(p_n) = (\{A^n.\perp\})$ et $\mathbf{lim}p_n = A^\omega$ .Par contre il existe des suites croissantes et qui ne convergent pas pour la topologie métrique vers la borne supérieure de leurs éléments . Par exemple la suite (p_n) définie par $p_n = \{A_k.B/k \leq n\} \cup \{A_k.\perp/k > n\}$ où $\{ A_k \,;\, k \in \mathrm{N} \}$ est une partie dénombrable de AR_P est une suite croissante dont la borne supérieure est $p_\omega = \{ A_k.\mathrm{B} \,;\, k \in \mathrm{N} \}$ pour laquelle on a $d(p_n, p_\omega) = \frac{1}{4}$

La propriété suivante montre le lien existant entre l'ordre et la distance sur $\mathcal{P}$:
Propriété :*Si on définit AR_P(p)=$\{ A \in AR\_P \,;\, A \diamond p \neq \emptyset \}$ alors :*

- $p \leq q$ ssi **origine**(p)=**origine**(q) *et* $p = \Omega_t$ *ou bien AR_P(p)=AR_P(q) et* $\forall A \in AR\_P(p)\ A \circ p \leq A \circ q$
- *de plus si on définit les préordres* $\leq_n$ *par :*
  - $p \leq_0 q$ ssi **origine**(p)=**origine**(q)
  - $p \leq_{n+1}$ ssi **origine**(p)=**origine**(q) *et* $p = \Omega_t$ *ou bien AR_P(p)=AR_P(q) et* $\forall A \in AR\_P(p)\ A \circ p \leq_n A \circ q$

  alors

$$\begin{array}{rcll} d(p,q) & = & 0 & \text{si } \forall n \in \mathbf{N}\ p \cong_n q \\ & = & 2^{-k} & \text{où } k = \mathbf{min}_j\ (p \not\cong_j q) \text{ sinon} \end{array}$$

  où $p \cong_n q \iff p \leq_n q \text{ et } q \leq_n p$

preuve :

- Le premier point se vérifie sans difficulté .
- Pour le second notons que la relation $p \cong_0 q$ est toujours vérifiée et que : $p \cong_{n+1} q$ ssi $p = q = \Omega_t$ ou bien p et $q \neq \Omega_t$ et $\forall A \in \mathrm{AR\_P}\ A \circ p \cong_n A \circ q$. Cela revient donc à établir $p \cong_n q$ ssi $p[n] = q[n]$. ce qui est immédiat une fois que l'on a remarqué que si $p \neq \Omega_t$ et $\{\epsilon_t\}\ p[n+1] = \bigcup_{A \in \mathrm{AR\_P}} < A, (A \circ p)[n] >$

2.2 Caractérisation équationnelle des processus

2.2.1 un cadre catégorique

Afin de pouvoir dériver les opérateurs sur les processus à partir des règles opérationnelles, nous avons besoin d'identifier, de façon récursive, les processus avec des fonctions qui associent à chaque arbre de preuve un multi-ensemble de processus. Ceci nous conduit à choisir le domaine de l'interprétation comme solution d'une équation de domaine. Pour cette raison nous allons utiliser des méthodes empruntées à la théorie des catégories ce qui fournit un cadre général dans lequel de telles équations peuvent être résolues de façon systématique (voir Smyth-Plotkin [SP82] et Wand [Wan79]). Nous procédons de la façon suivante ; nous nous donnons une catégorie de domaines $\mathcal{C}$ avec ω^{op}-limites et contenant un objet terminal et un foncteur continu $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{C}$ qui décrit la propriété requise , on résout alors dans $\mathcal{C}$ l'équation $X \cong \mathcal{F}(X)$ en utilisant la construction de point-fixe suivante. Nous noterons $\mathbf{Y}\mathcal{F}$ la limite projective de la ω^{op}-chaîne

$$O_0 \xleftarrow{\pi_0} O_1 \xleftarrow{\pi_1} O_2 \ldots O_n \xleftarrow{\pi_n} O_{n+1} \ldots$$

dans laquelle :

- $\mathcal{O}_0$ est l'objet terminal et $\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathcal{O}_{n+1} = \mathcal{F}\, \mathcal{O}_n$
- π_0 est l'unique morphisme de $\mathcal{O}_1$ dans $\mathcal{O}_0$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad \pi_{n+1} = \mathcal{F}(\pi_n)$

$\mathcal{F}$ étant continu $\mathbf{S} = \mathbf{Y}\mathcal{F}$ est solution de l'équation précédente ; c'est à dire : $\mathbf{S} \cong \mathbf{Y}\mathcal{F}$.
De plus si on définit la catégorie $\mathcal{F}$-alg des $\mathcal{F}$-algèbres par :

- ses objets sont les couples $(\mathcal{O}, \alpha)$ tel que $\mathcal{O}$ soit un objet de la catégorie $\mathcal{C}$ et que α soit un morphisme de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{F}\mathcal{O}$
- Ses morphismes $(\mathcal{O}_1, \alpha_1) \xrightarrow{\phi} (\mathcal{O}_2, \alpha_2)$ sont en correspondance bijective avec les morphismes $\mathcal{O}_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_2$ de $\mathcal{C}$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{F}\mathcal{O}_1 \arrow[d, "\mathcal{F}\phi"] \\ \mathcal{O}_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & \mathcal{F}\mathcal{O}_2 \end{tikzcd}$$

Si ϕ désigne l'isomorphisme entre S et $\mathcal{F}\, S$ du fait que $\mathcal{O}_0$ est un objet terminal de la catégorie $\mathcal{C}$ on sait que (S, ϕ) est un objet terminal de la catégorie $\mathcal{F}$-alg.

2.2.2 La catégorie $\mathcal{C}$

On définit la catégorie $\mathcal{C}$ par :

- ses objets sont des quadruplets (X,$\leq$,d,r) tels que
  - $r \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$
  - d est une distance ultramétrique prenant ses valeurs dans $\{0\} \cup \{2^{-n}; 0 \leq n < r\}$ faisant de (X,d) un espace métrique complet.
  - $\leq$ est une relation d'ordre sur X telle que toute chaîne d'éléments de X admet dans X une borne supérieure
- ses morphismes sont les applications $(X_1, \leq_1, d_1, r_1) \xrightarrow{\phi} (X_2, \leq_2, d_2, r_2)$ vérifiant :
  - $r_1 \geq r_2$
  - ϕ est continue pour l'ordre : $x = \mathbf{sup}_n x_n \Rightarrow \phi(x) = \mathbf{sup}_n \phi(x_n)$
  - $\phi(x) \neq \phi(y) \Longrightarrow d_1(x, y) = d_2(\phi(x), \phi(y))$
  - si $x \neq y$ alors $(\phi(x) = \phi(y) \Longleftrightarrow d_1(x, y) \leq 2^{-r_2})$

Propriété : *Cette catégorie est complète par limite projective d'ω^{op}-chaînes*

En effet soit $\Delta = P_0 \xleftarrow{\pi_0} P_1 \xleftarrow{\pi_1} P_2 \ldots P_n \xleftarrow{\pi_n} P_{n+1} \ldots$ une telle chaîne soit alors P $\stackrel{def}{=}$ (S,$\leq$,d,r) tel que :

- $r = \mathit{lim}_{n \to +\infty} r_n \quad \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$
- S est l'ensemble des suites (s_n) telles que $s_n \in P_n$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad s_n = \pi_n(s_{n+1})$

- $\leq$ est défini par : $S_1 \leq S_2$ ssi $\forall n \in \mathbf{N}$ $S_1(n) \leq_n S_2(n)$
- d est défini par :

$$\begin{array}{rcll} d(S_1, S_2) & = & d_n(S_1(n), S_2(n)) & \text{où } n = \min\{n \in \mathbf{N} / \ S_1(n) \neq S_2(n)\} \\ & = & 0 & \text{si } \forall n \in \mathbf{N} \ S_1(n) \leq_n S_2(n) \end{array}$$

P est la limite projective des P_n (on notera $P = \lim_{\leftarrow} P_n$) :

- On montre que P est un élément de la catégorie $\mathcal{C}$; ce qui nécessite, en particulier, de vérifier que (P,d) est un espace métrique complet et que toute chaîne de (P,$\leq$) y admet une borne supérieure (voir le paragraphe 2.2.6 pour ces preuves).
- on définit $\lambda_n : P \longrightarrow P_n$ par : $\lambda_n(s) = s(n)$ on vérifie qu'il s'agit d'un morphisme , de plus du fait que $s(n) = \pi_n(s(n+1))$ on déduit : $\lambda_n = \pi_n \circ \lambda_{n+1}$. On obtient donc ainsi un cône $\lambda : \ P \rightarrow \Delta$ pour cette chaîne.
- Si $\mu : \ Q \rightarrow \Delta$ est un cône pour cette chaîne il existe un unique morphisme $Q \xrightarrow{\alpha} P$ tel que $\lambda_n \circ \alpha = \mu_n$ il est défini par :
  $\forall q \in Q \ \ \alpha(q) = s$ est l'élément de P tel que : $\forall n \in \mathbf{N} \ \ s(n) = \mu_n(q)$

De plus cette catégorie possède un élément terminal qui est $(\{\Omega\}, \leq_0, d_0, 0)$ où $\leq_0$ et d_0 sont définis de la seule façon possible :
$\Omega \ \leq_0 \ \Omega$ et $d_0(\Omega, \Omega) = 0$
En effet si $\mathcal{O} = (X, \leq, d, r, 0)$ est un élément quelconque de $\mathcal{C}$ il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}$ dans $(\{\Omega\}, \leq_0, d_0, 0)$ défini par : $\forall x \in X \ \ \phi(x) = \Omega$

2.2.3 foncteurs de $\mathcal{C}$

$\mathcal{O} = (X, \leq, d, r)$ désignant un élément courant de cette catégorie $\mathcal{C}$ on peut définir les foncteurs suivants qui s'avèreront suffisant pour décrire la structure des processus :

- $\mathcal{M}_f[.]$ correspond au choix non déterministe et est défini par :
  - $\mathcal{M}_f(\mathcal{O}) \ = \ (\mathcal{M}_f(X), \leq_*, d_*, r)$ où :
    * $\mathcal{M}_f(X)$ désigne l'ensemble des multi-parties finies constituées d'éléments de X
    * $\mathcal{E} \leq_* \mathcal{F}$ ssi il existe une bijection ϕ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ telle que : $\forall x \in \mathcal{E} \ \ x \leq \phi(x)$
    * d_* est définie par:

$$\begin{array}{rcll} d_*(\mathcal{E}, \mathcal{F}) & = & 1 & \text{si } \mathrm{Card}(\mathcal{E}) \neq \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \\ & = & \min_{\sigma \in P_n} \max_{1 \leq i \leq n} d(A_i, B_{\sigma_i}) & \text{si } \mathcal{E} = \{A_1, \ldots, A_n\} \\ & & & \text{et } \mathcal{F} = \{B_1, \ldots, B_n\} \end{array}$$

    (P_n désigne l'ensemble des permutations de {1,...,n})

  - Si $X \xrightarrow{\phi} Y$ est un morphisme on définit le morphisme $\mathcal{M}_f(X) \xrightarrow{\mathcal{M}_f(\phi)} \mathcal{M}_f(Y)$ par :

$$(\mathcal{M}_f(\phi)(\mathcal{E}))(y) \ = \ \sum_{x \in \phi^{-1}\{y\}} \mathcal{E}(x)$$

    note : si $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{M}_f(X)$ et x un élément de X on note $\mathcal{E}$(x) le degré de multiplicité de x dans $\mathcal{E}$.

- $A \times [.]$ correspond au produit à gauche par les termes élémentaires définissant les processus :

- $A \times \mathcal{O} = (A \times X, \leq_A, d_A, r)$ où :
  * $< a, x > \leq_A < b, y > \Longleftrightarrow a = b$ et $x \leq y$
  * d_A est définie par :

$$d_A(< a, x >, < b, y >) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq b \\ d(x, y) & \text{sinon} \end{cases}$$

- Si $X \xrightarrow{\phi} Y$ est un morphisme, on définit le morphisme $A \times X \xrightarrow{A \times \phi} A \times Y$ par : $A \times \phi = 1_A \times \phi$

- $[.]^E$ correspond au choix déterministe gardé et est défini par :
  - $\mathcal{O}^E = (E \rightarrow X, \sqsubseteq, d_{sup}, r + 1)$ avec :
    * $E \rightarrow X$ désigne l'ensemble des applications de E dans X
    * $\phi \sqsubseteq \psi$ ssi $\forall \alpha \in E \ \phi(\alpha) \leq \psi(\alpha)$
    * $d_{sup}(\phi, \psi) = \frac{1}{2}\sup_{\alpha \in E} d(\phi(\alpha), \psi(\alpha))$
  - Si $X \xrightarrow{\phi} Y$ est un morphisme , on définit le morphisme $X^E \xrightarrow{\phi^E} Y^E$ par : $\phi^E = \lambda\psi . \phi \circ \psi$

- $[.]_\Omega$ correspond à l'ajout d'un processus indéfini :
  - $\mathcal{O}_\Omega = (X_\Omega, \leq_\Omega, d_\Omega, r)$ avec :
    * $\Omega \notin X$ et $X_\Omega = X \cup \{\Omega\}$
    * $\leq_\Omega$ est défini par :

$$x \leq_\Omega y \quad \text{ssi ou bien } x = \Omega \quad \text{ou bien } x \neq \Omega,\ x \neq \Omega \text{ et } x \leq y$$

    * d_Ω est défini par :

$$d_\Omega(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{si A=B=}\Omega \\ 1/2 & \text{si A=}\Omega \neq B \text{ ou } A \neq \Omega = B \\ \text{d(A,B)} & \text{sinon} \end{cases}$$

  - Si $X \xrightarrow{\phi} Y$ est un morphisme , on définit le morphisme $X_\Omega \xrightarrow{\phi_\Omega} Y_\Omega$ par : $\phi_\Omega(\Omega) = \Omega$ et si $x \neq \Omega \quad \phi_\Omega(x) = \phi(x)$

On vérifie , pour chaque foncteur $\mathcal{F}$ précédent, que les structures $\mathcal{FO}$ ainsi définies sont effectivement des objets de $\mathcal{C}$ et que $\mathcal{F}\phi$ est bien un morphisme de $\mathcal{C}$ chaque fois que ϕ l'est. Ces vérifications ne présentent pas, en général, de difficulté seul le cas de $\mathcal{M}_f$ nécessite quelques attentions (voir le paragraphe 2.2.6).
On montre, de plus, que chacun de ces foncteurs est continu.

2.2.4 Une caractérisation équationnelle des processus

Nous allons maintenant donner une caractérisation équationnelle des processus, pour cela on introduit le foncteur $\mathcal{F}_1 = d - Termes \times [.] \circ [.]_\Omega \circ [.]^{AR\_P} \circ \mathcal{M}_f$ (dans $\mathcal{C}$) ; en particulier, $\mathcal{F}_1(X) = d - Termes \times (\{\Omega\} \cup (AR\_P \longrightarrow \mathcal{M}_f(X)))$ (dans **Ens**) [2]

[2]Si V est un ensemble d'ensembles, $\mathbf{Ens}_V$ est la catégorie ayant pour objets les ensembles $X \in V$ et pour flèches les fonctions $f{:}X \rightarrow Y$ avec la composition usuelle des fonctions. Par **Ens** on désigne une de ces catégories (cf. [Lan71]). Alors pour tout foncteur $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ on notera également $\mathcal{F}$ le foncteur de la catégorie **Ens** qui est défini de la même façon que lui (en oubliant les parties qui, dans sa définition, concerne l'ordre ou la distance).

et on définit le domaine $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} \stackrel{def}{=} \mathbf{Y}\mathcal{F}_1$.
Il reste à établir le lien entre ce domaine $\mathcal{P}$ et le domaine $\mathcal{P}_r$ plus intuitif que nous avons introduit plus haut.

Proposition : *l'application ψ_1 de $\mathcal{P}_r$ dans $\mathcal{F}_1(\mathcal{P}_r)$ définie de la façon suivante est un morphisme de $\mathcal{C}$*

- *Si* $p = \Omega_t$ *alors* $\psi_1(p) = < t, \Omega >$
- *Sinon* $\psi_1(p) = < \mathbf{origine}(p), \lambda A\ .\ \mathbf{si}\ A \diamond p \neq \emptyset\ \mathbf{alors}\ \{A \circ p\}\ \mathbf{sinon}\ \emptyset >$

Preuve

- $\mathcal{P}_r$ et $\mathcal{F}_1(\mathcal{P}_r)$ sont de rang $+\infty$
- on a de façon immédiate : $p \leq_{n+1} q \Longleftrightarrow \psi_1(p)(\mathcal{F}_1 \leq_n)\psi_1(q)$ où $\leq_n$ sont les préordres définis en 2.1.4.on établit alors le lemme suivant :
  lemme : $(\psi_1(p))(\mathcal{F}_1 \leq)(\psi_1(q)) \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \quad (\psi_1(p))(\mathcal{F}_1 \leq_n)(\psi_1(p))$
  preuve :
  Si $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre on a :
  $$\begin{array}{lll} (\psi_1(p))(\mathcal{F}_1 \sqsubseteq)(\psi_1(q)) & \Longleftrightarrow & \mathbf{origine}(p) = \mathbf{origine}(q) = t \quad et \\ & & \mathbf{ou\ bien} \quad p = \Omega_t \\ & & \mathbf{ou\ bien} \quad AR\_P(p) = AR\_P(q) \quad et \quad \forall A \in AR\_P(p) \quad A \circ p \sqsubseteq A \circ q \end{array}$$
  de $[p \leq q \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \quad p \leq_n q]$ on déduit immédiatement que :
  $$(\psi_1(p))(\mathcal{F}_1 \leq)(\psi_1(q)) \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \quad (\psi_1(p))(\mathcal{F}_1 \leq_n)(\psi_1(q))$$
  Du fait que quels que soient p et q on a $p \leq_0 q$ le lemme précédent donne :
  $$p \leq q \Longleftrightarrow (\psi_1(p))(\mathcal{F}_1 \leq)(\psi_1(q))$$
- On a $d(\psi_1(p), \psi_1(q)) = d(p, q)$
  La vérification est immédiate dans les cas particuliers où p et q n'ont pas la même origine ou bien s'il l'un des deux au moins est de la forme Ω_t ou $\{\epsilon_t\}$ et dans les autres cas on rappelle (2.1.4) :
  $$p[n+1] = \bigcup_{A \in AR\_P} < A, (A \circ p)[n] >$$
  et donc si $\mu_n\ .\ P(n)$ désigne le plus petit entier vérifiant $P(n)$ ou $+\infty$ s'il n'y en a pas, on a :
  $$\mu_n\ .\ [p[n] \neq q[n]] = 1 + \min_{A \in AR\_P}(\mu_m\ .\ [(A \circ p)[m] \neq (A \circ p)[m]])$$
  Et donc si AR_P(p)$\neq$ AR_P(q) ; $d(\psi_1(p), \psi_1(q)) = d(p, q) = 1/2$ sinon :
  $$d(\psi_1(p), \psi_1(q) = d(p, q) = 1/2 \times \max_{A \in AR\_P(p)} d(A \circ p, A \circ q)$$

Et ainsi $(\mathcal{P}_r, \psi_1)$ est un élément de $\mathcal{F}_1$-alg ; par conséquent il existe un unique morphisme α tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_r \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{F}_1\mathcal{P}_r \arrow[d, "\mathcal{F}_1\alpha"] \\ \mathcal{P} \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{F}_1\mathcal{P} \end{tikzcd}$$

On peut identifier $\mathcal{P}_r$ avec son image par α dans $\mathcal{P}$ en effet $\mathcal{P}_r$ et $\mathcal{P}$ ayant pour rang $+\infty$, α est une injection et ,en restreignant son image à $\alpha[\mathcal{P}_r]$, il s'agit d'une isométrie et d'un isomorphisme pour l'ordre.

2.2.5 opérations sur $\mathcal{P}$

somme sur $\mathcal{P}$

En utilisant l'isomorphisme existant entre $\mathcal{P}$ et d-Termes $\times$ $(\{\Omega\} \cup (AR\_P \to \mathcal{M}_f(\mathcal{P})))$ on peut définir la somme d'une famille *finie* $\{P_i; i \in I\}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ à condition qu'ils aient tous la même origine t et soient tous différents de Ω_t par :

$$\sum_{i\in I} P_i =< t, \lambda A \,.\, \sum_{i \in I} P_i(A) >$$

(où le second symbole $\sum$ désigne la réunion de multi-ensembles).

Propriété : *la somme est non expansive ce qui signifie :*
Si $\mathcal{E} = \{P_i; 1 \le i \le n\}$ *et* $\mathcal{F} = \{Q_j; 1 \le j \le m\}$ *sont des éléments* **sommables** *(au sens précédent) de* $\mathcal{M}_f(\mathcal{P})$ *alors :*

$$d(\sum_{1\le i\le n} P_i, \sum_{1 \le j \le m} Q_j) \le d_*(\{P_i; 1 \le i \le n\}, \{Q_j; 1 \le j \le n\})$$

preuve

Si $n \ne m$ alors $d_*(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 1$ et l'inégalité est donc nécessairement vérifiée. Supposons donc n=m alors :

$$d(\sum_{i=1}^{n} P_i, \sum_{j=1}^{n} Q_j) = 1/2 \times \max_{A \in AR\_P} d_*(\sum_{i=1}^{n} P_i(A), \sum_{i=1}^{n} Q_j(A))$$

Or $d_*(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \min_{\sigma\in\mathcal{P}_n} \max_{1\le i\le n} d(P_i, Q_{\sigma i})$ on peut supposer que la permutation qui fournit ce minimum soit l'identité et alors :

$$d_*(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \max_{1\le i\le n} d(P_i, Q_i) = 1/2 \max_{1\le i\le n} \max_{A\in AR\_P} d_*(P_i(A), Q_i(A))$$

Nous sommes donc ainsi amener à établir :

$$d_*(\sum_{i=1}^{n} P_i(A), \sum_{i=1}^{n} Q_i(A)) \le \max_{1\le i\le n} d_*(P_i(A), Q_i(A))$$

S'il existe un indice i pour lequel $P_i(A)$ et $Q_i(A)$ n'aient pas le même cardinal alors, dans ce cas, $d_*(P_i(A), Q_i(A)) = 1$ et l'inégalité est nécessairement vérifiée . Supposons donc maintenant $\forall i\, \exists n_i \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Card}(P_i(A)) = \mathrm{Card}(Q_i(A)) = n_i$ et posons $P_i(A) = \{P_{i,j} \ / \ 1 \le j \le n_i\}$ et $Q_i(A) = \{Q_{i,j} \ / \ 1 \le j \le n_i\}$ alors :

$$\begin{aligned} d_*(\textstyle\sum_{i=1}^n P_i(A), \sum_{i=1}^n Q_i(A)) &= d_*(\textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \{P_{i,j}\}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \{Q_{i,j}\}) \\ &= \min_{\sigma\in Perm} \max_{<i,j>} d(P_{i,j}, Q_{i,j}) \\ &\le \min_{\sigma \in Perm'} \max_{<i,j>} d(P_{i,j}, Q_{i,j}) \end{aligned}$$

Où Perm est l'ensemble de toutes les permutations de $\{< i, j > \ / \ 1 \le i \le n \text{ et } 1 \le j \le n_i\}$ et $Perm'$ est le sous ensemble de Perm constitué de celles qui sont de la forme $\sigma < i, j >=< i, \rho_i(j) >$ où ρ_i est une permutation de $\{1, \ldots, n_i\}$ $(\rho_i \in P_i)$ ainsi :

$$\min_{\sigma\in Perm'} \max_{<i,j>} d(P_{i,j}, Q_{i,j}) = \max_{1\le i\le n} \min_{\rho_i \in P_i} \max_{1\le j\le n_i} d(P_{i,j}, Q_{i,\rho_i(j)}) = \max_{1\le i\le n} d_*(P_i(A), Q_i(A))$$

préfixage
En abrégant l'écriture "λA . **si** $cond$ **alors** $\{X\}$ **sinon** $\emptyset$" én "λA . $Cond\ X$" l'opération de préfixage telle qu'elle a été définie sur $\mathcal{P}_r$ s'étend aux éléments de $\mathcal{P}$ en une opération partielle de la façon suivante : si B $\in$ AR_P et P $\in \mathcal{P}$ $< B, P >$ est définie lorsque **résultat**(B)=**origine**(P) et vaut alors $<$ **sujet**$(B), \lambda A . (A = B) \ : P >$.
Et si $< B, P_1 >$ et $< B, P_2 >$ sont définies $d(< B, P_1), < B, P_2 >) = 1/2 \times d(P_1, P_2)$.

2.2.6 Preuves

'complétude' de la limite projective Pour prouver que la catégorie $\mathcal{C}$ est complète par limites projectives il nous reste à établir les deux propositions qui suivent :

Proposition (P,d) *est un espace métrique complet*

Remarquons que si $r < +\infty$ alors P est trivialement complet puisque toutes les suites de Cauchy sont stationnaires ; supposons donc que $r = +\infty$ et notons μ_n le plus petit indice tel que $r_{\mu_n} \geq n$.
Ainsi $r_n \geq m \Leftrightarrow m \geq \mu_n$.
On remarque : $S_1(n) = S_2(n) \Longleftrightarrow d(S_1, S_2) < 2^{-r_n}$
soit encore : $S_1(\mu_m) = S_2(\mu_m) \Longleftrightarrow d(S_1, S_2) < 2^{-m}$
Soit $(S_p)_{p\in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de P ; sa n^{ieme} composante $(S_p(n))_{p\in \mathbf{N}}$ est une suite de cauchy de P_n (car $d_n(S_p(n), S_q(n))$ est soit nulle soit égale à $d(S_p, S_q)$) et donc converge dans P_n vers un élément S(n). Les morphismes π_n étant continus pour la distance on en déduit que $S(n) = \pi_n(S(n+1))$ et que, par conséquent, la suite S=$(S(n))_{n\in \mathbf{N}}$ est un élément de P.
$(S_p)_{p\in \mathbf{N}}$ étant une suite de Cauchy : $\forall m \in \mathbf{N}\, \exists p_m . \forall p, q \geq p_m\ d(S_p, S_q) < 2^{-m}$. et donc toutes les suites d'indice supérieur à p_m coïncident au moins jusqu'au terme de rang μ_m et donc coïncident aussi jusqu'a ce rang avec la suite S. Par conséquent, $\forall m \in \mathbf{N}\ \ \exists p_m\ \ .\ \ d(S, S_p) < 2^{-m}$. Ce qui montre que S est la limite dans P de la suite $(S_p)_{p\in \mathbf{N}}$.

Proposition : *Toute chaîne de* (P, $\leq$) *y admet une borne supérieure.*

Si $(S_p)_p$ est une chaîne de P alors pour tout entier n $(S_p(n))_p$ est une chaîne de P_n qui admet donc dans P_n une borne supérieure S(n) ; les morphismes π_n étant continus pour l'ordre on en déduit que S(n)=π_n S(n+1) et que, par conséquent, la suite s=$(S(n))_{n\in \mathbf{N}}$ est un élément de P. Il est immédiat de vérifier que s est la borne supérieure de $(S_p)_p$ dans P.

quelques vérifications concernant le foncteur $\mathcal{M}_f$
Proposition : *Si (X,d) est un espace métrique complet alors* $(\mathcal{M}_f(X), d_*)$ *l'est aussi*

Soit $(A_k)_{k\in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{M}_f(X)$. On peut en extraire une sous suite $(B_k)_{k\in \mathbf{N}}$ telle que : $\forall j, k \in \mathbf{N}\ d_*(B_j, B_k) \leq 2^{-j}$ (en particulier tous les éléments de B_j ont le même cardinal p dès que $j \geq 1$) Soit σ_n pour $n \in \mathbf{N}^*$ définie comme étant une bijection de B_n dans B_{n+1} telle que :

$$d_*(B_n, B_{n+1}) \ = \ \max\{d(x, \sigma_n(x))/x \in B_n\}$$

Si $B_1 = \{a_1, \ldots, a_p\}$ on peut alors définir p suites dans X de la manière suivante : $\alpha_i = (a_i^k)_{k\in \mathbf{N}^*}$ avec $a_i^1 = a_i$ et $a_i^{k+1} = \sigma_k(a_i^k)$ ainsi $a_i^k \in B_k$ et $d(a_i^k, a_i^{k+1}) \leq d_*(B_k, B_{k+1}) \leq 2^{-k}$. La distance sur X étant ultramétrique il est immédiat que :

$$\forall i\ .\ 1 \leq i \leq n\ \ \forall j \in \mathbf{N}^*\ \ \forall k \in \mathbf{N}\ \ d(a_i^j, a_i^{j+k}) \leq 2^{-j}$$

Les p suites α_i sont donc des suites de Cauchy, elles convergent donc dans X vers une limite a_i^∞ .Tous les éléments de la suite $(a_i^k)_{k\in \mathbf{N}^*}$ à partir du rang j appartiennent à la boule *fermée* de centre a_i^j et de rayon 2^{-j} leur limite a_i^∞ se trouve donc aussi dans cette boule, c'est à dire $d(a_i^j, a_i^\infty) \leq 2^{-j}$

si on définit $B_\infty = \{a_1^\infty, \dots, a_p^\infty\}$ on a alors $d(B_k, B_\infty) \leq 2^{-k}$. Ainsi $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui admet une sous suite convergente elle est donc elle même convergente.

Proposition : *Si toute chaîne d'éléments de $(X,\leq)$ y admet une borne supérieure alors toute chaîne de $(\mathcal{M}_f(X), \leq_*)$ admet dans $\mathcal{M}_f(X)$ une borne supérieure*

Remarquons que si $\mathcal{C}$ est une chaîne d'éléments de $\mathcal{M}_f(X)$ chacun de ses éléments doit avoir la même cardinalité k ; notons $\mathcal{M}_k(X)$ l'ensemble des multiparties de X contenant k éléments. On va essayer de construire k chaînes d'éléments de X à partir d'une chaîne d'éléments de $\mathcal{M}_k(X)$.
Si $\mathcal{C} = \{A^\alpha / \alpha \in I\}$ est une chaîne de $\mathcal{M}_k(X)$ on dira que $\mathcal{C}$ admet une *décomposition en fibres* $(C_1, \dots, C_k)$ lorsque $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $C_i = \{A_i^\alpha \ / \ \alpha \in I\}$ est une chaîne de X et :

- $A^\alpha \leq_* A^\beta \implies (\forall i \in \{1, \dots, k\} \ A_i^\alpha \leq A_i^\beta)$
- $A^\alpha = \{A_i^\alpha \ / \ 1 \leq i \leq k\}$ pour tout $\alpha \in I$

Et la proposition est obtenue grâce au lemme :
Lemme 1 : *Si $\mathcal{C}$ admet une décomposition en fibres $(C_1, \dots, C_k)$ et si C_i^∞ est la borne supérieure de C_i dans X alors $C^\infty = \{C_i^\infty \ /1 \leq i \leq k\}$ est la borne supérieure de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{M}_k(X)$*

Le problème se ramène alors à décomposer la chaîne $\mathcal{C}$ en k fibres. L'idée est de faire cette construction par récurrence transfinie mais l'ordre $\leq_*$ n'est pas un bon ordre. Le lemme montré en 2.1.3 indiquait que toute chaîne contient une partie dense bien ordonnée. Nous sommes donc ramenés à établir :
Lemme 2 : *Toute partie bien ordonnée de $\mathcal{M}_k(X)$admet une décomposition en fibres*

Preuve du Lemme 1
On a besoin du lemme supplémentaire :
Lemme 3 : *Si $\mathcal{C} = \{A^\alpha \ / \ \alpha \in I\}$est une chaîne de $\mathcal{M}_k(X)$et si $\mathcal{P} = \{C_k \ / \ 1 \leq k \leq N\}$est une partition de $\mathcal{C}$ ayant un nombre fini N de classes alors il existe au moins une classe de $\mathcal{P}$ dense dans $\mathcal{C}$*

Preuve supposons qu'aucune des classes C_k ne soit dense dans $\mathcal{C}$. Puisque C_1 n'est pas dense dans $\mathcal{C}$ il existe au moins un élément A^{α_1} de $\mathcal{C} \setminus C_1$ qui n'est majoré par aucun élément de C_1 mais comme l'ordre est total (il s'agit d'une chaîne) on en déduit que A^{α_1} est un majorant de C_1.
Sans perte de généralité on peut supposer que $A^{\alpha_1} \in C_2$. On fait le même raisonnement avec C_2 et on obtient ainsi un élément A^{α_2} de $\mathcal{C} \setminus C_2$ et qui majore strictement C_2. A^{α_2} ne peut pas appartenir à C_1 car sinon on aurait à la fois :

- $A^{\alpha_1} > A^{\alpha_2}$ car α_1 majore strictement C_1 et $A^{\alpha_2} \in C_1$
- $A^{\alpha_2} > A^{\alpha_1}$ car A^{α_2} majore strictement C_2 et $A^{\alpha_1} \in C_2$

On peut supposer que $A^{\alpha_2} \in C_3$. En réitérant ce procédé on trouve N-1 éléments : A^{α_k} pour $1 \leq k \leq N$ tels que $A^{\alpha_k} \in C_{k+1}$ et A^{α_k} majore strictement C_k. Par transitivité de la relation d'ordre : $A^{\alpha_{N-1}} \in C_N$ et majore $\bigcup_{k=1}^{N-1} C_k = \overline{C}_N$ où $\overline{C}_N$ est le complémentaire de C_N dans $\mathcal{C}$.
On voit alors que C_N est dense dans $\mathcal{C}$: en effet soit $A \in \mathcal{C}$ il existe $B \in C_N$ tel que $A \leq B$ car :

- ou bien $A \in \overline{C}_N$ et on prend $B = A^{\alpha_{N-1}}$
- ou bien $A \in C_N$ et on prend B=A

d'où la contradiction .
Prouvons maintenant le lemme 1

- Par hypothèses on a donc $C_i = \{A_i^\alpha \ / \ \alpha \in I\}$; $\mathcal{C} = \{A^\alpha \ , \ \alpha \in I\}$ avec :
  - $A^\alpha = \{A_i^\alpha \ / \ 1 \leq i \leq k\}$ pour tout $\alpha \in I$
  - $\forall \alpha, \beta \in I \quad A^\alpha \leq_* A^\beta \ \Rightarrow \ (\forall i. 1 \leq i \leq k \ \ A_i^\alpha \leq A_i^\beta)$

- Soit A^α un élément de la chaîne $\mathcal{C}$ $\forall i. 1 \leq i \leq n \ \ A_i^\alpha \leq A_i^\infty$ et donc$A^\alpha \leq_* C^\infty$ ainsi C^∞ est bien un majorant de $\mathcal{C}$.

- Soit B=$\{B_1, \ldots, B_k\}$ un majorant de $\mathcal{C}$
  - Notons $\sum$ l'ensemble des permutations σ de $\{1, \ldots, k\}$; $\sum$ a un nombre fini d'éléments: Card($\sum$)=k!
  - Puisque $A^\alpha \leq_* B$ il existe au moins un élément σ_α de $\sum$ (s'il y en a plusieurs on en choisit arbitrairement un) tel que : $\forall i. 1 \leq i \leq k \quad A_i^\alpha \leq B_{\sigma_\alpha(i)}$
  - A chaque élément σ de $\sum$ on associe $c_\sigma = \{A^\alpha \ / \ \sigma_\alpha = \sigma\}$. On obtient ainsi une partition de $\mathcal{C}$ en au plus N classes ; le lemme précédent nous assure qu'il existe au moins une classe c_τ de cette partition qui soit dense dans $\mathcal{C}$
  - Et donc $\forall \alpha \in I \ \ \forall i. 1 \leq i \leq k \quad A_i^\alpha \leq B_{\tau(i)}$ (car A^α est majoré par au moins un élément A^β de c_τ et alors $A_i^\alpha \leq A_i^\beta \leq B_{\tau(i)}$)
  - $B_{\tau(i)}$ majore C_i et donc $C_i^\infty \leq B_{\tau(i)}$ et donc $C^\infty \leq_* B$

Preuve du lemme 2 :

Soit $\mathcal{C} = \{A^\alpha; \alpha \leq I\}$ une partie bien ordonnée de $\mathcal{M}_k(X)$ c'est à dire I est un ordinal tel que [1,I] soit un ensemble ordonné isomorphe à $\mathcal{C}$. On construit les k fibres par récurrence transfinie de la manière suivante :
Pour $\alpha \in [1, I]$ on pose $H(\alpha)$ l'hypothèse suivante : *" Toute décomposition en fibres de $\mathcal{C}^\beta = \{A^\gamma; \gamma \leq \beta\}$ pour β tel que $\beta < \alpha$ se prolonge en une décomposition en fibres de $\mathcal{C}^\alpha$".* On montre alors $H(\alpha)$ pour tout α dans [1,I] . Pour cela, soit $\alpha \in [1, I]$ tel que $\forall \gamma < \alpha$ on ait $H(\gamma)$ et soit $C_i^\beta = \{A_i^\gamma; \gamma \leq_I \beta\}$ pour $1 \leq i \leq k$ une décomposition en fibres de $\mathcal{C}^\beta$ pour un certain $\beta < \alpha$. On peut, comme en 2.1.3, utiliser l'axiome de la chaîne pour en déduire l'existence de $\tilde{C}_i^\alpha = \{A_i^\gamma; \gamma <_I \alpha\}$ pour $1 \leq i \leq k$ tels que :

- $\forall \gamma <_I \alpha \quad A^\gamma = \{A_i^\gamma; 1 \leq i \leq k\}$
- $\gamma_1 <_I \gamma_2 <_I \alpha \Longrightarrow (\forall i \ \ 1 \leq i \leq k \ \ A_i^{\gamma_1} \leq A_i^{\gamma_2})$

et il faut construire $C_i^\alpha = \{A_i^\gamma; \gamma \leq_I \alpha\}$ pour $1 \leq i \leq k$ et prolongeant les propriétés précédentes.Pour cela :

- **si α possède un antécédent β**
  $A^\beta \leq_* A^\alpha$ et donc il existe une bijection ϕ de A^β dans A^α telle que :
  $\forall a \in A^\beta \ \ a \leq \phi(a)$ on définit alors A_i^α par $A_i^\alpha = \phi(A_i^\beta)$

- **si α est un point limite**
  Si on note C_i^∞ la borne supérieure de la chaîne c_i^α le lemme 1 indique que $C^\infty = \{C_i^\infty; 1 \leq i \leq n\}$ est alors la borne supérieure de $\mathcal{C}^\alpha = \{A^\gamma; \gamma <_I \alpha\}$. A^α majore $\mathcal{C}^\alpha$ et donc $C^\infty \leq_* A^\alpha$. il existe donc une bijection ϕ de C^∞ dans A^α telle que : $\forall a \in C^\infty \quad a \leq \phi(a)$ on définit alors A_i^α par $A_i^\alpha = \phi(C_i^\infty)$

Dans les deux cas il est clair que les C_i^α sont des chaînes et que les conditions précisées plus haut sont vérifiées.

Proposition : *Le foncteur $\mathcal{M}_f$ est continu.*

Soit $\Delta = P_0 \xleftarrow{\pi_0} P_1 \xleftarrow{\pi_1} \dots P_n \xleftarrow{\pi_n} P_{n+1} \xleftarrow{\pi_{n+1}} \dots$ une ω^{op}-chaîne de $\mathcal{C}$ et $\lambda : X \longrightarrow \Delta$ sa limite projective . Il lui correspond par $\mathcal{M}_f$ la chaîne :
$\mathcal{M}_f(\Delta) = \mathcal{M}_f(P_0) \xleftarrow{\mathcal{M}_f(\pi_0)} \mathcal{M}_f(P_1) \xleftarrow{\mathcal{M}_f(\pi_1)} \dots \mathcal{M}_f(P_n) \xleftarrow{\mathcal{M}_f(\pi_n)} \mathcal{M}_f(P_{n+1}) \xleftarrow{\mathcal{M}_f(\pi_{n+1})} \dots$
Soit $\mu : Y \longrightarrow \mathcal{M}_f(P_n)$ sa limite projective ; il faut donc montrer qu'il existe un isomorphisme entre X et Y autrement dit une paire $< \alpha, \beta >$ de morphismes de $\mathcal{C}$ entre X et Y réciproques l'un de l'autre .

définition de α

On définit un cône $\mathcal{M}_f(\lambda) : \mathcal{M}_f(X) \longrightarrow \mathcal{M}_f(\Delta)$ sur la chaîne Δ par : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathcal{M}_f(\lambda_n) : \mathcal{M}_f(X) \longrightarrow \mathcal{M}_f(P_n)$. Il existe donc un unique morphisme $\alpha : X \longrightarrow Y$ tel que $\forall n : \mathcal{M}_f(\lambda_n) = \mu_n \circ \alpha$ c'est à dire : $\alpha(\{S_1, \dots, S_n\})$ =S avec $S(n) = \{S_1(n), \dots, S_k(n)\}$.

définition de β

Soit S un élément de Y on construit par récurrence des suites $S_j \in X$ $(1 \leq j \leq k = Card(S))$ telles que : $S(n) = \{S_1(n), \dots, S_k(n)\}$ tout en montrant l'unicité du multi-ensemble $\beta(S) = \{S_1, \dots, S_k\}$ ainsi construit . Nous dirons que $\beta(S)$ est la ***décomposition en fibres*** de S.
Supposons donc construit jusqu'au rang n la décomposition en fibre de S , notons la :
$\beta(S)[n] = \{S_1[n], \dots, S_k[n]\}$. Pour prolonger cette décomposition au rang n+1 on utilise le fait que $S(n) = \pi_n(S(n+1))$ et donc qu'il existe une numérotation $\{S_1^{n+1}, \dots, S_k^{n+1}\}$ des éléments de $S(n+1)$ telle que $S_j[n](n) = \pi_n(S_j^{n+1})$. On obtient ainsi une décomposition en fibre prolongée $\beta(S)[n+1] = \{S_1[n+1], \dots, S_k[n+1]\}$ où $S_j[n+1] = S_j[n].S_j^{n+1}$ [3] .
Soit σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$ telle que $S_j[n](n) = \pi_n(S_{\sigma j}^{n+1})$. On obtient à priori, grâce à σ, une autre prolongation de $\beta(S)[n]$ en $\beta(S)[n+1]^\sigma = \{S_j[n].S_{\sigma j}^{n+1} \ ; \ 1 \leq j \leq k\}$ ce qui peut encore s'écrire $\beta(S)[n+1]^\sigma = \{S_{\sigma^{-1}j}[n].S_j^{n+1} \ ; \ 1 \leq j \leq k\}$ mais on remarque que les suites finies $S_j[n]$ sont caractérisées par leur dernier élément $S_j[n](n)$ puisqu'on obtient alors tous les autres grâce aux morphismes π_j $(1 \leq j \leq n)$; et donc puisque $S_j[n](n) = S_{\sigma^{-1}j}[n](n) = \pi_n(S_j(n+1))$ on en déduit $S_j[n] = S_{\sigma^{-1}j}[n]$ et, par conséquent, $\beta(S)[n+1]^\sigma = \beta(S)[n]$ ce qui établit l'unicité de la décomposition en fibre ainsi construite.

Il est immédiat que $\alpha \circ \beta = 1_Y$ et $\beta \circ \alpha = 1_X$. Vérifions maintenant que *l'application* β est un *morphisme* de la catégorie $\mathcal{C}$.

- Notons tout d'abord que $\mathbf{rang}(X) = \mathbf{rang}(Y) = \lim_n \mathbf{rang}(P_n) = r$
- Montrons que : $S \leq S' \Rightarrow \beta S \leq \beta S'$
  Soit $\beta(S) = \{S_1, \dots, S_k\}$ et donc $S(n) = \{S_1(n), \dots, S_k(n)\}$
  et $\beta(S') = \{S'_1, \dots, S'_k\}$ et donc $S'(n) = \{S'_1(n), \dots, S'_k(n)\}$
  on a $S \leq S' \iff S(n) \leq S'(n)$
  Pour cela, désignons par Σ_n l'ensemble des permutations σ de {1,...,k} telles que $\forall j \ 1 \leq j \leq k$ $S_j(n) \leq S'_{\sigma j}(n)$ notons :
  - $S(n) \leq S'(n)$ signifie que $\Sigma_n \neq \emptyset$
  - le fait que les morphismes π_n soient croissants entraîne que $\Sigma_{n+1} \subset \Sigma_n$
  - Enfin on remarque que ces ensembles sont finis car $Card(\Sigma_n) \leq n!$

[3] Si $S = (S(i))_{1 \leq i \leq n}$ est une suite finie et x un élément la notation $S' = S.x$ désigne la suite finie $S' = (S'(i))_{1 \leq i \leq n+1}$ telle que si $1 \leq i \leq n$ $S'(i) = S(i)$ et $S'(n+1) = x$

donc il existe un élément σ dans $\bigcap_n \Sigma_n$. Par conséquent $\forall j \quad 1 \leq j \leq k \quad S_j \leq S_{\sigma j}$ c'est à dire $\beta(S) \leq \beta(S')$

- Montrons que si $\beta(S) \neq \beta(S')$ alors $d(S, S') = d(\beta S, \beta S')$

$$\begin{array}{llll} \beta(S) \neq \beta(S') & \Longrightarrow & \alpha\beta S \neq \alpha\beta S' & \text{car } \alpha \text{ est injectif} \\ & \Longrightarrow & d(\beta S, \beta S') = d(\alpha\beta S, \alpha\beta S') & \text{car } \alpha \text{ est un morphisme} \\ & \Longleftrightarrow & d(\beta S, \beta S') = d(S, S') & \text{car } \alpha \circ \beta = 1_Y \end{array}$$

- Puisque X et Y ont même rang la condition restant à vérifiée équivaut à l'injectivité de β et est donc, de ce fait, vérifiée.

2.3 Morphismes de modèles

Pour décrire une classe de morphismes de modèles nous sommes conduits à nous intéresser à la catégorie **K** dont les objets sont des triplets $< c, \pi, c' >$ où c et c' sont deux objets de la catégorie $\mathcal{C}$ et π une application de c dans c' croissante et non expansive , et tel que les morphismes de $< c_1, \pi_1, c_1' >$ dans $< c_2, \pi_2, c_2' >$ soient les paires $< h, k >$ de morphismes de $\mathcal{C}$ tels que le diagramme suivant commute (dans la catégorie **Ens**):

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_1"'] & c_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ c_1' \arrow[r, "k"] & c_2' \end{tikzcd}$$

K possède un objet terminal qui est : $< P_0, 1_{P_0}, P_0 >$ et est complète par limite projective d'ω^{op}-chaîne .
En effet si $\Delta = X_0 \xleftarrow{\phi_0} X_1 \ldots X_n \xleftarrow{\phi_n} X_{n+1} \ldots$ est une telle chaîne avec $X_n =< c_n, \pi_n, c_n' >$ et $\phi_n =< h_n, k_n >$ on en déduit les deux chaînes de C :
$\Delta_1 = c_0 \xleftarrow{h_0} c_1 \ldots c_n \xleftarrow{h_n} c_{n+1} \ldots$
$\Delta_2 = c_0' \xleftarrow{k_0} c_1' \ldots c_n' \xleftarrow{k_n} c_{n+1}' \ldots$
qui admettent , par conséquent , des limites projectives dans $\mathcal{C}$ montrons que :

$$\lim_{\leftarrow \mathbf{K}} \Delta =< \lim_{\leftarrow \mathcal{C}} \Delta_1, \prod_{n \in \mathbf{N}} \pi_n, \lim_{\leftarrow \mathcal{C}} \Delta_2 >$$

Désignons par L le membre droit de l'égalité précédente.

- On définit un cône $< \mu, \mu' > : L \longrightarrow \Delta$ sur cette chaîne par :
si $s \in \lim_{\leftarrow \mathcal{C}} \Delta_1$ alors $\mu_n(s) = s_n$ et si $s \in \lim_{\leftarrow \mathcal{C}} \Delta_2$ alors $\mu_n'(s) = s_n$. C'est à dire que $\mu : \lim_{\leftarrow \mathcal{C}} \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1$ et $\mu' : \lim_{\leftarrow \mathcal{C}} \Delta_2 \longrightarrow \Delta_2$ sont les cônes correspondant dans la catégorie $\mathcal{C}$; en effet :

  - on vérifie que $< \mu_n, \mu_n' >: L \longrightarrow (P_n, \pi_n, P_n)$ est bien un morphisme de **K** , c'est à dire que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_n & \lim_{\leftarrow C} \Delta_1 \arrow[l, "\mu_n"'] \arrow[d, "\prod_{n\in \mathbf{N}} \pi_n"] \\
P_n \arrow[from=u, "\pi_n"'] & \lim_{\leftarrow C} \Delta_2 \arrow[l, "\mu_n'"]
\end{tikzcd}
$$

ce qui est clair, en effet si $s \in \lim_{\leftarrow C} \Delta_1$ on a :

$$\pi_n \circ \mu_n(s) = \mu_n' \circ (\prod_{n\in \mathbf{N}} \pi_n)(s) = \pi_n(s_n)$$

– On vérifie ensuite que pour tout n on a $< \mu_n, \mu_n' > = < h_n, k_n > \circ < \mu_{n+1}, \mu_{n+1}' >$ ce qui résulte du fait que μ et μ' sont des cônes sur Δ_1 et Δ_2 respectivement.

- Soit maintenant $< \nu, \nu' >: (\mathcal{A}, \varphi, A) \longrightarrow \Delta$ un autre cône . Nous savons qu'il existe un morphisme α de $\mathcal{C}$ entre $\mathcal{A}$ et $\lim_{\leftarrow C} \Delta_1$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}\ \nu_n = \mu_n \circ \alpha$ et de la même façon un morphisme β entre A et $\lim_{\leftarrow C} \Delta_2$ tel que $\forall n \in \mathbf{N} \quad \nu_n' = \mu_n' \circ \beta$. Graphiquement on peut résumer nos hypothèses en disant que les deux triangles et les deux trapèzes qui composent le diagramme suivant commutent :

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\nu_n"'] \arrow[ddd, "\varphi"'] & & \lim_{\leftarrow C} \Delta_1 \arrow[dl, "\mu_n"] \arrow[ddd, "\prod_{n\in \mathbf{N}} \pi_n"] \\
\arrow[r, phantom, "(3)"] & \mathcal{P}_n \arrow[d, "\pi_n"] \arrow[r, phantom, "(1)"] & {} \\
& P_n & \\
A \arrow[rr, "\beta"'] \arrow[ur, "\nu_n'"] & & \lim_{\leftarrow C} \Delta_2 \arrow[ul, "\mu_n'"']
\end{tikzcd}
$$

et notre but est de montrer que le carré résultant commute également, c'est à dire :

$$(\prod_{n\in \mathbf{N}} \pi_n) \circ \alpha = \beta \circ \varphi \tag{1}$$

il en découle en effet que $< \alpha, \beta >$ est un morphisme de $\mathbf{K}$ tel que
$\forall n \in \mathbf{N} \quad < \nu_n, \nu_n' > = < \mu_n, \mu_n' > \circ < \alpha, \beta >$ ce qui achève la preuve.
Notons que si e est un élément de $\mathcal{A}$ alors $((\prod_{n\in \mathbf{N}} \pi_n) \circ \alpha)(e)$ et $(\beta \circ \varphi)(e)$ sont éléments de $\lim_{\leftarrow C} \Delta_2$ ce sont donc des suites. Montrer que ces suites sont égales revient à établir qu'elles ont les mêmes termes ; c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mu_n'[((\prod_{n\in \mathbf{N}} \pi_n) \circ \alpha)(e)] = \mu_n'[(\beta \circ \varphi)(e)]$$

Démontrer [1] revient donc à établir que :

$$\mu_n^{'} \circ (\prod_{n \in \mathbf{N}} \pi_n) \circ \alpha = \mu_n^{'} \circ \beta \circ \varphi$$

ce qui résulte facilement des hypothèses :

$$\begin{array}{rcll} \mu_n^{'} \circ (\prod_{n \in \mathbf{N}} \pi_n) \circ \alpha & = & \pi_n \circ \mu_n \circ \alpha & \text{car (1) commute} \\ & = & \pi_n \circ \nu_n & \text{car (2) commute} \\ & = & \nu_n^{'} \circ \varphi & \text{car (3) commute} \\ & = & \mu_n^{'} \circ \beta \circ \varphi & \text{car (4) commute} \end{array}$$

des foncteurs de K

Considérons la catégorie $\mathcal{C}'$ ayant pour objets ceux de $\mathcal{C}$ et dont les morphismes sont les applications croissantes et non expansives entre les ensembles sous-jacents. On peut étendre la définition des précédents foncteurs de $\mathcal{C}$ ($\mathcal{M}_f$, $[.]^E$, $[.]_\Omega$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$) en des foncteurs de $\mathcal{C}'$ de mêmes noms. Rappelons qu'une transformation naturelle $\tau : \mathcal{F}_1 \dot{\rightarrow} \mathcal{F}_2$ entre deux foncteurs de $\mathcal{C}'$ est une application qui associe à chaque élément de $\mathcal{C}'$ (c'est à dire de $\mathcal{C}$) un morphisme $\tau c : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ de $\mathcal{C}'$ tel que si $\pi : c \rightarrow c'$ est un morphisme quelconque de $\mathcal{C}'$ (i.e.. si $< c, \pi, c' >>$ est un élément de K) alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_1 c \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "\mathcal{F}_1 \pi"'] & \mathcal{F}_2 c \arrow[d, "\mathcal{F}_2 \pi"] \\ \mathcal{F}_1 c' \arrow[r, "\tau c'"] & \mathcal{F}_2 c' \end{tikzcd}$$

La proposition suivante nous permet de définir des foncteurs sur K.

Proposition : ***Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux foncteurs de $\mathcal{C}'$ tels que, restreints à $\mathcal{C}$, ce sont des foncteurs de $\mathcal{C}$ [4] (notés aussi $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$) ; et si, de plus, il existe une transformation naturelle $\tau : \mathcal{F}_1 \dot{\rightarrow} \mathcal{F}_2$ entre eux ; alors on peut définir un foncteur $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ de K de la façon suivante :***

- ***$\mathcal{F}(< c, \pi, c' >) =< \mathcal{F}_1(c), [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2](\pi), \mathcal{F}_2(c') >$ avec $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2](\pi) = \mathcal{F}_2 \pi \circ \tau_c = \tau_{c'} \circ \mathcal{F}_1 \pi$ ce qui peut se représenter par la diagonale du diagramme commutatif suivant :***

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_1 c \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "\mathcal{F}_1 \pi"'] \arrow[dr, "{[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\pi}"] & \mathcal{F}_2 c \arrow[d, "\mathcal{F}_2 \pi"] \\ \mathcal{F}_1 c' \arrow[r, "\tau c'"'] & \mathcal{F}_2 c' \end{tikzcd}$$

- ***si $< h, k >$ est un morphisme de $\mathcal{O} =< c_1, \pi, c_2 >$ vers $\mathcal{O}' =< c_1', \pi', c_2' >$ alors $\mathcal{F} < h, k > =< \mathcal{F}_1(h), \mathcal{F}_2(k) >$ est le morphisme correspondant de $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ vers $\mathcal{F}(\mathcal{O}')$.***

---

[4] puisque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont les mêmes objets et la même composition des flèches cela revient à :
pour tout $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(O_1, O_2) \subset Hom_{\mathcal{C}'}(O_1, O_2)$ on a $\mathcal{F}_1 \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_1 O_1, \mathcal{F}_1 O_2)$ et $\mathcal{F}_2 \varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_2 O_1, \mathcal{F}_2 O_2)$

De plus, si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont deux foncteurs continus de $\mathcal{C}$ alors $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ est un foncteur continu de $\mathbf{K}$

Preuve

La preuve consiste en la vérification des deux points suivants :

1^{ere} étape : *si $< h, k >$ est un morphisme de $O =< c_1, \pi, c_2 >$ dans $O' =< c_1', \pi', c_2' >$ alors $\mathcal{F} < h, k >$ défini par $\mathcal{F} < h, k > =< \mathcal{F}_1(h), \mathcal{F}_2(k) >$ est un morphisme de $\mathcal{F}(O)$ dans $\mathcal{F}(O')$.*

Cela revient à démontrer que le diagramme 3 commute chaque fois que le diagramme 1 commute.

$$\begin{tikzcd} c_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_1"'] & c_1' \arrow[d, "\pi_2"] \\ c_2 \arrow[r, "k"] & c_2' \end{tikzcd}$$

diag.1

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}_1 c_1' \arrow[rr, "\tau_{c_1'}"] \arrow[dd, "\mathcal{F}_1\pi_2"] \arrow[ddrr] & & \mathcal{F}_2 c_1' \arrow[dd, "\mathcal{F}_2\pi_2"] \\ \mathcal{F}_1 c_1 \arrow[ur, "\mathcal{F}_1 h"] \arrow[rr, "\tau_{c_1}"] \arrow[dd, "\mathcal{F}_1\pi_1"'] \arrow[ddrr] & & \mathcal{F}_2 c_1 \arrow[ur, "\mathcal{F}_2 h"] \arrow[dd, "\mathcal{F}_2\pi_1"] & \\ & \mathcal{F}_1 c_2' \arrow[rr, "\tau_{c_2'}"] & & \mathcal{F}_2 c_2' \\ \mathcal{F}_1 c_2 \arrow[ur, "\mathcal{F}_1 k"] \arrow[rr, "\tau_{c_2}"] & & \mathcal{F}_2 c_2 \arrow[ur, "\mathcal{F}_2 k"'] & \end{tikzcd}$$

diag.2

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_1 c_1 \arrow[r, "\mathcal{F}_1 h"] \arrow[d, "{[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\pi_1}"'] & \mathcal{F}_1 c_1' \arrow[d, "{[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\pi_2}"] \\ \mathcal{F}_2 c_2 \arrow[r, "\mathcal{F}_2 k"] & \mathcal{F}_2 c_2' \end{tikzcd}$$

diag.3

Des hypothèses on déduit que chacun des diagrammes constituant les faces du parallélépipède représenté par le diagramme 2 commute. Deux de ces faces sont les images du diagramme 1 par les foncteurs $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les quatre autres faces correspondent à chacune des flèches de $\mathbf{K}$ constituant le diagramme 1 (les flèches de $\mathcal{C}$ sont également des flèches de $\mathbf{K}$). Il est alors facile de montrer que le diagramme 3 commute en remarquant qu'il s'agit d'une "*coupe*" du précédent parallélépipède.

2^{ieme} étape : *Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des foncteurs continus de $\mathcal{C}$ alors $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ est un foncteur continu de* $\mathbf{K}$.

Avec les mêmes notations que précédement on a :

$$\mathcal{F} \varprojlim_{\mathbf{K}} \Delta = (\mathcal{F}_1 \varprojlim_{\mathcal{C}} \Delta_1, [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2] \prod_{n\in\mathbf{N}} \pi_n, \mathcal{F}_2 \varprojlim_{\mathcal{C}} \Delta_2)$$

et

$$\varprojlim_{\mathbf{K}} \mathcal{F}\Delta = (\varprojlim_{\mathcal{C}} \mathcal{F}_1\Delta_1, \prod_{n\in\mathbf{N}} [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\pi_n, \varprojlim_{\mathcal{C}} \mathcal{F}_2\Delta_2)$$

et nous devons établir qu'il existe un isomorphisme entre ces deux éléments de $\mathbf{K}$. Les foncteurs $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant continus dans $\mathcal{C}$ on sait qu'il existe deux isomorphismes α et β dans $\mathcal{C}$.

$$(\mathcal{F}_1 \varprojlim_{\mathcal{C}} \Delta_1) \xrightarrow{\alpha} (\varprojlim_{\mathcal{C}} \mathcal{F}_1\Delta_1) \quad et \quad (\mathcal{F}_2 \varprojlim_{\mathcal{C}} \Delta_2) \xrightarrow{\beta} (\varprojlim_{\mathcal{C}} \mathcal{F}_2\Delta_2)$$

nous allons montrer que $< \alpha, \beta >$ procure l'isomorphisme recherché. Pour cela, on note que les deux triangles et les deux trapèzes qui constituent le diagramme suivant commutent.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_1 \lim_{\leftarrow C} \Delta_1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_1\mu_n"'] \arrow[ddd, "{[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\prod_n \pi_n}"'] & & \lim_{\leftarrow C} \mathcal{F}_1\Delta_1 \arrow[dl, "\lambda_n"] \arrow[ddd, "{\prod_{n\in \mathbf{N}}[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\pi_n}"] \\
& \mathcal{F}_1 c_n \arrow[d, "{[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\pi_n}"] & \\
& \mathcal{F}_2 c'_n & \\
\mathcal{F}_2 \lim_{\leftarrow C} \Delta_2 \arrow[rr, "\beta"'] \arrow[ur, "\mathcal{F}_2\mu'_n"] & & \lim_{\leftarrow C} \mathcal{F}_2\Delta_2 \arrow[ul, "\lambda'_n"']
\end{tikzcd}
$$

Par un raisonnement analogue à ce qui a été fait plus haut on en déduit que le carré résultant commute ; c'est à dire que $< \alpha, \beta >$ est effectivement un morphisme de $\mathbf{K}$. Et, par la même méthode [5], on montre que $< \alpha^{-1}, \beta^{-1} >$ est un morphisme de $\mathbf{K}$ qui est l'inverse du précédent.

3 Des Définitions Opérationnelles Structurelles au modèle initial

3.1 Sémantique opérationnelle

3.1.1 syntaxe

Pour décrire la syntaxe du langage on introduit les ensembles qui suivent ; on précise pour chacun d'entre eux la notation des métavariables qui seront utilisées pour les parcourir.

- **VAR_A** : ensemble des variables arithmétiques (métavariables :x,y,z ...)
- **EXP_A** : ensemble des expressions arithmétiques, cet ensemble contient l'ensemble **N** des entiers naturels. (métavariable : e)
- **EXP_B** : ensemble des expressions booléennes qui contient l'ensemble **T**={ vrai, faux } des valeurs de vérité . (métavariable : b)
- Δ : ensemble des noms de ports au travers desquels s'effectueront les passages de valeurs. (métavariables : α, β, γ ...)
- χ : ensemble des identificateurs utilisés pour les définitions récursives . (métavariables : X, Y, Z ...)
- **REN** : ensemble des applications de Δ dans Δ coïncidant avec l'application identique sauf pour un nombre fini de valeurs. (métavariable : S)
- **ENV_A** : ensemble des environnements arithmétiques. Ce sont des applications de VAR_A dans $\mathbf{N}_\perp = \mathbf{N} \cup \{\perp\}$ qui n'associent une valeur autre que $\perp$ qu'à un nombre fini de variables arithmétiques. c'est une algèbre effective pour les opérateurs suivants :
  - $(x = n)$ (arité 0) procure l'environnement ayant la valeur n en x et $\perp$ ailleurs.

[5] On remarque que puisque β est un isomorphisme dans C l'égalité entre deux éléments e_1 et e_2 de $\mathcal{F}_2 \lim_{\leftarrow C} \Delta_2$ équivaut à : $\forall n \in \mathbf{N} \ (\mathcal{F}_2\mu'_n)(e_1) = (\mathcal{F}_2\mu'_n)(e_2)$

- $\rho\{n/x\}$ (arité 1)

$$(\rho\{n/x\})(y) = \begin{cases} \rho(y) & \text{si } y \neq x \\ n & \text{si y=x} \end{cases}$$

- $\rho_1[\rho_2]$ (arité 2)

$$\rho_1[\rho_2](x) = \begin{cases} \rho_1(x) & \text{si } \rho_2(x)=\perp \\ \rho_2(x) & \text{si } \rho_2(x) \neq \perp \end{cases}$$

- **TERMES** : l'ensemble des termes (métavariables : u,t, ...) .Cet ensemble est défini par :

$$\begin{array}{lll} t & ::= & f_\gamma(t_1,\ldots,t_{n_\gamma}) & f_\gamma \in F \text{ d'arité } n_\gamma \\ & & X[\rho] & X \in \chi \text{ et } \rho \in \text{ENV\_A} \\ & & \alpha?\text{x.t} & \alpha \in \Delta \end{array}$$

Les déclarations permettront d'associer à chaque identificateur X_i de χ un terme t_i; la signification de $X_i[\rho]$ sera celle de t_i dans lequel on aura remplacé les occurrences libres de la variable arithmétique x par sa valeur dans ρ si elle y est définie (i.e. $\rho(x) \neq \perp$).
On ne souhaite pas ici se préoccuper de l'évaluation des expressions arithmétiques et booléennes (qu'on supposera toujours se terminer). On suppose donc connues deux applications :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{V}_A & : & \text{EXP\_A} \longrightarrow (\text{ENV\_A} \longrightarrow N_\perp) \\ \mathcal{V}_B & : & \text{EXP\_B} \longrightarrow (\text{ENV\_A} \longrightarrow T_\perp) \end{array}$$

qui calculent les valeurs des expressions dans un environnement arithmétique donné . Les opérateurs eux même peuvent dépendre de l'environnement arithmétique ; pour la même raison on supposera connue l'application :

$$\mathcal{V}_{\text{OP}} \quad : \quad F \longrightarrow (\text{ENV\_A} \longrightarrow F)$$

qui, dans le contexte d'un environnement arithmétique, "simplifie" l'opérateur ; par exemple :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{V}_{\text{OP}}(\text{si}x \leq y)(\{x=2; y=4\}) & = & \text{si vrai} \\ \mathcal{V}_{\text{OP}}(\alpha!(2x+y))(\{x=3; z=1\}) & = & \alpha!(6+y) \\ \mathcal{V}_{\text{OP}}(\alpha!(x=x))(\{y=1\}) & = & \alpha!(x=x) \end{array}$$

(*les tautologies ne sont pas simplifiées*)
On fera les hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{V}_{\text{OP}}(\mathcal{V}_{\text{OP}}(f_\gamma)(\rho_1))(\rho_2) & = & \mathcal{V}_{\text{OP}}(f_\gamma)(\rho_2[\rho_1]) \\ \text{VAR}(\mathcal{V}_{\text{OP}}(f_\gamma)) & = & \text{VAR}(f_\gamma) \setminus \text{DEF}(\rho) \end{array}$$

où VAR(f) désigne l'ensemble des variables arithmétiques apparaissant dans f et DEF(ρ)={ x $\in$ VAR_A / $\rho(x) \neq \perp$ } . On définit enfin le noyau de F par NOYAU = { f $\in$ F / VAR(f)= $\emptyset$}

- **DEC** : ensemble des déclarations (métavariable d). C'est l'ensemble des expressions de la forme : rec$(X_1,\ldots,X_n).(t_1,\ldots,t_n)$ où n $\in$ N , $X_i \in \chi$ et $t_i \in$ Termes tels que les seuls identificateurs de χ apparaissant dans les t_i sont les éléments de { $X_1,\ldots,X_n$}. (on appelle d-Termes l'ensemble des tels termes)
On définit Varlib$_d$: d-Termes $\longrightarrow \mathcal{P}$(VAR_A) comme étant la plus petite solution (pour l'ordre : $\phi \leq \psi$ ssi $\forall t \in$ d-Termes $\phi(t) \subset \psi(t)$) de l'ensemble d'équations :

$$\begin{array}{rrcl} \forall f \in F & \text{Varlib}_d(f(T_1,\ldots,T_n)) & = & \text{VAR(f)} \cup \bigcup_{i=1}^{i=n} \text{Varlib}_d(T_i) \\ \left.\begin{array}{r}\forall i.1 \leq i \leq n \\ \forall \rho \in \text{ENV\_A}\end{array}\right\} & \text{Varlib}_d(X_i[\rho]) & = & \text{Varlib}_d(t_i) \setminus \text{DEF}(\rho) \\ \forall \alpha \in \Delta \forall x \in \text{VAR\_A} & \text{Varlib}_d(\alpha?\text{x.T}) & = & \text{Varlib}_d(T) \setminus \{x\} \end{array}$$

En effet, soit E=$\{x_1, \ldots, x_m\}$ l'ensemble des variables arithmétiques apparaissant dans les termes t_i $(1 \leq i \leq n)$ figurant dans la déclaration d. Considérons l'ensemble $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)^n$ des n-uplets de parties de E. Cet ensemble est fini ; et l'ordre suivant :

$$(E_1, \ldots, E_n) \sqsubseteq (E_1^{'}, \ldots, E_n^{'}) \text{ ssi } \forall i \,.\, 1 \leq i \leq n \;\; E_i \subset E_i^{'}$$

fait de $\mathcal{E}$ un treilli complet tel que la longueur maximale d'un chemin dans ce treilli soit N=n.m . On définit alors F_d : d-Termes $\longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ par :

$$\begin{aligned}
F_d(X_i[\rho])(E_1, \ldots, E_n) &= E_i \setminus \mathrm{DEF}(\rho) \\
F_d(f(T_1, \ldots, T_k))(E_1, \ldots, E_n) &= \mathrm{VAR(f)} \cup \textstyle\bigcup_{i=1}^{i=k} F_d(T_i)(E_1, \ldots, E_n) \\
F_d(\alpha ?\mathrm{x.T})(E_1, \ldots, E_n) &= F_d(T)(E_1, \ldots, E_n) \setminus \{x\}
\end{aligned}$$

La transformation $T = \lambda E_1 \ldots E_n.(F_d(t_i)(E_1 \ldots E_n)_{i=1}^{i=n})$ est croissante dans $\mathcal{E}$ et admet donc dans $\mathcal{E}$ un plus petit point fixe qui peut être obtenu en un nombre fini d'itérations : $(S_1 \ldots S_n) = \mathbf{Y}T = T^N(\emptyset \ldots \emptyset)$ et alors Varlib$_d$ définie par : $\forall t \in$ d-Termes Varlib$_d(t)$ = $F_d(S_1 \ldots S_n)$ est clairement la plus petite solution des équations données ci-dessus.
On peut alors définir d-Agents = { t $\in$ d-Termes / Varlib$_d$=$\emptyset$} qui est l'ensemble des d-Termes arithmétiquement clos vis-à-vis de d.

- **PROG** : ensemble des programmes (métavariables : p,q ...) C'est l'ensemble des expressions de la forme let d **in** t telles que t $\in$ d-Agents , c'est à dire : tous les identificateurs de χ qui apparaissent dans t sont définis dans d et t est arithmétiquement clos vis à vis de d.

T{n/x} désigne le terme T dans lequel on a remplacé chaque occurrence libre de x dans T par l'entier n. On le définit de la manière suivante :

-1- si $T = f_\gamma(T_1 \ldots T_{n_\gamma})$	T{n/x} = $f_\gamma\{n/x\}(T_1\{n/x\}, \ldots, T_{n_\gamma}\{n/x\})$ où $f_\gamma\{n/x\} = \mathcal{V}_{OP}(f_\gamma)(\{x = n\})$
-2- si $T = X_i[\rho]$	T{n/x} = $X_i[(x = n)[\rho]]$
-3- si $T = \alpha$?x.t	T{n/x} = α?x.t
-4- si $T = \alpha$?y.t avec $y \neq x$	T{n/x} = α?y.t{n/x}

Remarque : le -2- s'explique par le fait que si on à déjà, grâce à ρ, associé la valeur n aux occurrences libres de x dans le terme t_i auquel X_i fait référence cette opération est sans effet : $(X_i[\rho])\{n/x\} = X_i[\rho]$ sinon $(X_i[\rho])\{n/x\} = X_i[\rho\{n/x\}]$.
Cette définition se généralise à un environnement ρ : T[ρ] est défini par des règles analogues le -2- devenant : $(X_i[\rho_1])[\rho_2] = x_i[\rho_2[\rho_1]]$. La propriété suivante se vérifie immédiatement par récurrence sur la structure de t :

$$\forall t \in \text{d-Termes Varlib}_d(\text{t}\{\text{n/x}\}) = \text{Varlib}_d(t) \setminus \{\text{x}\}$$

et a pour conséquence :

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \alpha ?\text{x.t} \in \text{d-Agents ssi t}\{\text{n/x}\} \in \text{d-Agents}$$

Enfin si on définit la hauteur d'un terme par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{haut}(X[\rho]) &= 0 \\
\mathbf{haut}(f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma})) &= 1 + \mathbf{max}_{1 \leq i \leq n_\gamma}(\mathbf{haut}(t_i)) \\
\mathbf{haut}(\alpha ?\mathrm{x.t}) &= 1 + \mathbf{haut}(t)
\end{aligned}$$

on peut vérifier :

$$\forall t \in \text{d-Termes } \mathbf{haut}(t) = \mathbf{haut}(\text{t}\{\text{n/x}\}) \qquad (2)$$

3.1.2 Définitions opérationnelles

La sémantique opérationnelle s'attache à décrire les calculs associés aux programmes comme des suites de transitions, chaque transition figurant une étape élémentaire de calcul. La méthode préconisée par Plotkin [Plo81] consiste à caractériser les transitions par l'ensemble des formules prouvables dans un système constitué d'axiomes et de règles d'inférences.
Soit d = $\mathbf{rec}(X_1, \ldots, X_n).(t_1, \ldots, t_n)$ une déclaration fixée pour la suite. Si $t \in$ d-Agents, la transition étiquettée $t \xrightarrow{\alpha} t'$ signifie que le programme let d in t peut exécuter l'action élémentaire α et se reconfigurer en let d in t' à la suite de cette action (E désignera l'ensemble des actions). La spécification du comportement d'un programme est donné par l'ensemble des règles suivantes :

- **Récursivité :**
  Pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$ et $\rho \in$ ENV_A on dispose de l'axiome $\mathbf{rec}_{i,\rho}$: $X_i[\rho] \xrightarrow{\sigma} t_i[\rho]$.

- **Entrées de valeurs :**
  $\forall \alpha \in \Delta$ $\forall x \in$ VAR_A et $\forall n \in \mathbf{N}$ $\mathbf{ent}_{\alpha,x,n}$: $\alpha?\mathrm{x.p} \xrightarrow{\alpha?\mathrm{n}} \mathrm{p}\{\mathrm{n}/\mathrm{x}\}$

- **Opérateurs du noyau :**
  Ce système repose sur la structure inductive des termes du langage ; les règles d'inférence sont donc organisées en *définitions opérationnelles* des opérateurs du noyau. La définition opérationnelle d'un opérateur f_γ du noyau consiste en un ensemble R_γ de schéma de règles r ayant la forme suivante :

$$\frac{p_i \xrightarrow{c_i} p_i' \quad i \in I_r}{f_\gamma(p_1, \ldots, p_{n_\gamma}) \xrightarrow{c} C_r[q_1, \ldots, q_{n_\gamma}]} \quad \text{Si Cond}_r((c_i\ ;\ i \in I_r)\ ;\ c)$$

$$avec\ \ q_j = \begin{cases} p_j & \text{si} \quad j \notin I_r \\ p_j' & \text{si} \quad j \in I_r \end{cases}$$

Les lettres p_i, p_i', q_j représentent des méta-variables de processus et les lettres c_i,c des méta-variables de comportement.
Un tel schéma de règle se résume en un triplet $r\ = < I_r, Cond_r, C_r >$:

- $I_r \subset \{1, \ldots, n_\gamma\}$ explicite l'indice des composantes du système mis en jeux par r.
- $Cond_r$ est une condition décidable liant les comportements des composantes au comportement global du système. On supposera, pour tout comportement a, que l'ensemble $\{\vec{a_i}\ /\ Cond_r(\vec{a_i}, a)\}$ est fini .
- C_r est un contexte de CTU^{n_γ}.
  où l'ensemble CTU^n des *contextes à trous uniques dans* $\{1, \ldots, n\}$ est la réunion des CTU^n_J pour $J \subset \{1, \ldots, n\}$ tels que :
  - $[.]_k$ pour $1 \leq k \leq n$ est un élément de $CTU^n_{\{k\}}$.
  - Si f est un élément du noyau d'arité 0 c'est un élément de $CTU^n_\emptyset$.
  - Si f est un opérateur d'arité $m > 0$ et si $\forall k\ .\ 1 \leq k \leq m\ \ C_k \in CTU^n_{J_k}$ tels que les J_k soient disjoints deux à deux et aient pour réunion J alors $f(C_1, \ldots, C_m)$ est un élément de CTU^n_J.

Une instance d'un tel schéma de règles est obtenu en substituant des termes aux métavariables de processus et des actions aux métavariables de comportement celles ci vérifiant,de plus, la condition $Cond_r$.
La forme choisie ici pour les règles est analogue à celle étudiée par Robert de Simone [dS84]

3.1.3 Arbres de preuve

L'ensemble des arbres de preuve associé au système précédent est défini comme le plus petit ensemble AR_P tel que :

- un d-terme est un arbre de preuve
- $(\mathbf{rec}_{i,\rho} \ : \ \sigma)$ est un arbre de preuve
- $(\mathbf{ent}_{\alpha,x,n} \ : \ \alpha?\mathrm{n})$ est un constructeur d'arbres de preuve d'arité 1.
- Si $r \ = < I_r, Cond_r, C_r >$ est un schéma de règle correspondant à un opérateur f_γ d'arité n_γ et si α est une action $(r : \alpha)$ est un constructeur d'arbres de preuve d'arité n_γ.

L'évaluation d'un arbre de preuve fournit la transition dont il est la preuve c'est l'application **trans** définie comme suit :

- Si A est un d-terme alors $\mathbf{trans}(A) = \perp$
  (valeur indéfinie : un terme ne prouve aucune transition)
- $\mathbf{trans}((\mathbf{rec}_{i,\rho} \ : \ \sigma)) \ = \ X_i[\rho] \xrightarrow{\sigma} t_i[\rho]$
- pour l'entrée de valeurs :

$$\mathbf{trans}((\mathbf{ent}_{\alpha,x,n} \ : \ \alpha?\mathrm{n})(A) \ = \ \begin{array}{ll} \mathbf{si} & \text{A est un d-terme t} \\ \mathbf{alors} & \alpha?\mathrm{x.t} \xrightarrow{\alpha?\mathrm{n}} \mathrm{t}\{\mathrm{n}/\mathrm{x}\} \\ \mathbf{sinon} & \perp \end{array}$$

- Si $r \ = < I_r, Cond_r, C_r >$ alors :

$$\mathbf{trans}((r \ : \ \alpha)(A_1, \ldots, A_{n_\gamma}) \ = \ \begin{array}{ll} \mathbf{si} & \forall i \in I_r \ \ \mathbf{trans}(A_i) = t_i \xrightarrow{\alpha_i} t_i' \text{ t.q. } Cond_r(\vec{\alpha_i}; \alpha) \\ & \text{et } \forall i \notin I_r \ \ A_i \text{ est un terme } t_i \\ \mathbf{alors} & f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma}) \xrightarrow{\alpha} C_r[u_1, \ldots, u_{n_\gamma}] \\ & \text{avec} \quad u_j = \left\{ \begin{array}{lll} t_j & \mathbf{si} & j \notin I_r \\ t_j' & \mathbf{si} & j \in I_r \end{array} \right. \\ \mathbf{sinon} & \perp \end{array}$$

Proposition : $t_1 \xrightarrow{\alpha} t_2$ *est un formule valide* **ssi** *il existe un arbre de preuve A tel que* $\mathbf{trans}(A) \ = t_1 \xrightarrow{\alpha} t_2$.

La preuve est immédiate par récurrence sur la structure des arbres de preuve et sur la longueur des déductions pour la réciproque.
Si $\mathbf{trans}(A) = t_1 \xrightarrow{\alpha} t_2$ on définit $\mathbf{sujet}(A) = t_1$, $\mathbf{Compt}(A) = \alpha$ et **résultat**(A)=t_2.

3.2 Construction du modèle initial

3.2.1 Interprétation des opérateurs du noyau

On note $\mathcal{F}_n = \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{P}$ (muni de la distance de la convergence uniforme) et $[\mathcal{F}_n]$ le sous-ensemble constitué des applications *non expansives* de $\mathcal{F}_n$ c'est à dire telles que : $d(\varphi(\vec{p}), \varphi(\vec{q})) \leq d_{max}(\vec{p}, \vec{q})$ où $d_{max}(\vec{p}, \vec{q}) = \max_{1 \leq i \leq n} d(p_i, q_i)$ est la distance usuelle sur $\mathcal{P}_n$.
$\mathcal{P}$ étant complet il en est de même de $\mathcal{F}_n$ et de $[\mathcal{F}_n]$ (celui-ci étant fermé dans $\mathcal{F}_n$) . Enfin si NOYAU $= \{f_\gamma \ / \ \gamma \in \Gamma\}$ et si R est l'ensemble des schéma de règles on note $\mathcal{F}_\Gamma \stackrel{def}{=} \Pi_{\gamma \in \Gamma} \ [\mathcal{F}_{n_\gamma}]$ et

$\mathcal{F}_R \stackrel{def}{=} \Pi_{r\in R}\,[\mathcal{F}_{n_r}]$ où n_γ est l'arité de f_γ et n_r est celle de l'opérateur qui est sujet de la règle r. Munis de la distance du sup ces deux espaces $\mathcal{F}_\Gamma$ et $\mathcal{F}_R$ sont complets. Un élément $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}_\Gamma$ est une *interprétation des opérateurs du noyau* et on notera $\mathcal{A}\|f_\gamma\| = \mathcal{A}(\gamma)$.
Notre but est de trouver une interprétation $\mathcal{A} = (\mathcal{A}\|f_\gamma\|; \gamma \in \Gamma)$ des opérateurs du noyau telle que :

$$\mathcal{A}\|f_\gamma\|(\|t_1\|_{op}, \ldots, \|t_{n_\gamma}\|_{op}) = \|f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma})\|_{op} \tag{3}$$

autrement dit si p_i est l'ensemble des calculs maximaux d'origine t_i, $\mathcal{A}\|f_\gamma\|(p_1, \ldots, p_{n_\gamma})$ est l'ensemble des calculs maximaux d'origine $T = f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma})$. nous allons définir cette interprétation en deux étapes.

première étape

Etant donné $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_\Gamma$ Un contexte C de CTU^n s'interprète comme un élément de $\mathcal{F}_n$. Plus précisémment on lui associe $\tilde{C} \in \mathcal{F}_\Gamma \to \mathcal{F}_n$ de la façon suivante :

- Si C=$[.]_k$ alors $\tilde{C}(\mathcal{A})(\vec{p}) = \pi_k^n(\vec{p}) = p_k$
- Si C=f_a ...d'arité 0....alors $\tilde{C}(\mathcal{A})(\vec{p}) = \mathcal{A}\|f_a\|$
- Si C=$f_a(C_1, \ldots, C_k)$ alors $\tilde{C}(\mathcal{A})(\vec{p}) = \mathcal{A}\|f_a\|(\tilde{C}_1(\mathcal{A})(\vec{p}), \ldots, \tilde{C}_k(\mathcal{A})(\vec{p}))$

On vérifie de façon immédiate les deux propriétés suivantes :

- $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{F}_\Gamma\ \forall C \in CTU^n\ \ \tilde{C}(\mathcal{A})$ est non expansive .
- $\forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{F}_\Gamma\ \ d(\tilde{C}(\mathcal{A}_1), \tilde{C}(\mathcal{A}_2)) \leq d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

Ainsi on peut définir $\mathcal{T}_1 : \mathcal{F}_\Gamma \to \mathcal{F}_R$ par $\mathcal{T}_1(\mathcal{A})(r) = \tilde{C}_r(\mathcal{A})$ (autrement dit : $\mathcal{T}_1 = \Pi_{r\in R}\,\tilde{C}_r$) et on a donc :
Propriété : $\forall \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{F}_\Gamma\ \ d(\mathcal{T}_1(\mathcal{A}_1), \mathcal{T}_1(\mathcal{A}_2)) \leq d(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$

Remarquons de plus que si $\mathcal{A}$ vérifie l'équation 3 alors nécessairement :

$$\|C_r(u_1, \ldots, u_{n_\gamma})\|_{op} = \tilde{C}_r(\mathcal{A})(\|u_1\|_{op}, \ldots, \|u_{n_\gamma}\|_{op}) \tag{4}$$

deuxième étape

Si on abrège l'écriture "λA . si*cond* alors $\{X\}$ sinon $\emptyset$ " en "λA . *cond* : X"; on remarque :

$$\|t\|_{op} =< t, \lambda A\ .\ \mathbf{si}\ \ \mathbf{trans}(A) = t \xrightarrow{\alpha} t'\ :\ \|t'\|_{op} > \tag{5}$$

$\mathcal{A}$ vérifie l'équation 3 si, et seulement si, $\forall \gamma \in \Gamma$ et $t_1, \ldots, t_{n_\gamma} \in$ d-Termes on a :

$$\mathcal{A}\|f_\gamma\|(\|t_1\|_{op}, \ldots, \|t_{n_\gamma}\|_{op}) =< T, \sum_{r\in R_\gamma} \lambda A\ .\ \vec{t} \xrightarrow{A:r} \vec{u}\ :\ \|C_r(u_1, \ldots, u_{n_\gamma}\|_{op} > \tag{6}$$

avec T=$f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma})$ et la condition $\vec{t} \xrightarrow{A:r} \vec{u}$ signifie que A est l'arbre de preuve d'une transition ayant T (qui se déduit de r et de $\vec{t}$) comme origine c'est à dire :
$\exists A_i \in$ AR_P tels que $A = (r : \alpha)(A_1, \ldots, A_{n_\gamma})$ avec $\mathbf{trans}(A_i)$= $t_i \xrightarrow{\alpha_i} t_i'$ et $Cond_r(\vec{\alpha_i}, \alpha)$
et lorsque cette condition est vérifiée le vecteur $(u_i; 1 \leq i \leq n_\gamma)$ est défini par :

$$u_i = \begin{cases} t_i & \text{si} \quad i \notin I_r \\ t_i' & \text{si} \quad i \in I_r \end{cases}$$

(la condition précédente est paramètrée par $\vec{t}$, A et r ; $\vec{u}$ est déterminé par A lorsque cette condition est vérifiée) L'équation 6 se réécrit :

$$\mathcal{A}\|f_\gamma\|(\|t_1\|_{op}, \ldots, \|t_{n_\gamma}\|_{op}) =< T, \sum_{r\in R_\gamma} \lambda A\ .\ \vec{t} \xrightarrow{A:r} \vec{u} : \tilde{C}_r(\mathcal{A})(\|u_1\|_{op}, \ldots, \|u_{n_\gamma}\|_{op}) > \tag{7}$$

- Afin d'obtenir une formulation plus explicite de la condition $\vec{t} \xrightarrow{A:r} \vec{u}$ où $A = (r:\alpha)(A_1, \ldots, A_{n_\gamma})$ on définit l'application $\mathcal{E}_A$ de $\mathcal{P}^{n_\gamma}$ dans $\mathcal{M}_f(\mathcal{P}^{n_\gamma})$ par :

$$\mathcal{E}_A(\vec{P}) = \prod_{i \in I_r} P_i(A_i) \prod_{i \notin I_r} \{P_i\}$$

(le produit cartésien de multi-ensembles étant défini par $(\Pi_{i\in I}\ \mathcal{E}_i)(\vec{e}) = \Pi_{i\in I}\ \mathcal{E}_i(e_i)$).
De sorte que $\vec{t} \xrightarrow{A:r} \vec{u}$ ssi $(\|u_1\|_{op}, \ldots, \|u_{n_\gamma}\|_{op}) \in \mathcal{E}_A(\|t_1\|_{op}, \ldots, \|t_{n_\gamma}\|_{op})$

- Puis on définit l'application $\mathcal{T}_r$ de $\mathcal{F}_{n_\gamma}$ dans lui-même par :

$$\mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P}) = \lambda A \,.\, \begin{cases} \phi(\mathcal{E}_A(\vec{P})) & \text{si} \quad A:r \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \tag{8}$$

La condition A:r signifiant $\mathbf{trans}(A) \neq \perp$ et A correspond à r, et $\phi(\mathcal{E})(e) = \sum_{x \in \phi^{-1}(e)} \mathcal{E}(x)$ pour $\phi : X \to X$ et $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_f(X)$.

L'équation 7 s'écrit alors :

$$\mathcal{A}\|f_\gamma\|(\|t_1\|_{op}, \ldots, \|t_{n_\gamma}\|_{op}) =< f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma}), \sum_{r \in R(f_\gamma} \mathcal{T}_r(\tilde{C}_r(\mathcal{A}))(\|t_1\|_{op}, \ldots, \|t_{n_\gamma}\|_{op}) > \tag{9}$$

c'est à dire :

$$\mathcal{A}\|f_\gamma\|(\|\vec{t}\|_{op}) =< Term_\gamma, \sum_{r \in R(f_\gamma)} \mathcal{T}_r(\tilde{C}_r(\mathcal{A})) > (\|\vec{t}\|_{op}) \tag{10}$$

avec $Term_\gamma(P_1, \ldots, P_{n_\gamma}) = f_\gamma(\mathbf{origine}(P_1), \ldots, \mathbf{origine}(P_{n_\gamma}))$
Rappelons que $\mathcal{T}_1 : \mathcal{F}_\Gamma \to \mathcal{F}_R$ et $\mathcal{T}_1(\mathcal{A}) = \tilde{C}_r(\mathcal{A})$. Nous allons définir une interprétation $\mathcal{A}$ vérifiant 3 comme le point fixe d'une transformation $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$. La transformation $\mathcal{T}_2$ de $\mathcal{F}_R$ dans $\mathcal{F}_\Gamma$ est définie par $\mathcal{T}_2(\phi_r; r \in R) = (\psi_\gamma; \gamma \in \Gamma)$ avec

$$\psi_\gamma(P_1, \ldots, P_{n_\gamma}) =< Term_\gamma, \sum_{r \in R(f_\gamma)} \mathcal{T}_r(\phi_r) > (\vec{P})$$

On montre (voir le paragraphe 3.2.2) :

- Si chacun des ϕ_r est non expansif alors il en est de même des ψ_γ
- $\mathcal{T}_2$ est contractante de rapport 1/2

Ainsi $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ est contractante de rapport 1/2 dans $[\mathcal{F}_\Gamma]$ qui est complet ; elle admet donc un unique point fixe dans $[\mathcal{F}_\Gamma]$ notons le $\mathbf{Y}\ \mathcal{T}$.On définit alors l'interprétation $\mathcal{O}_p$ des opérateurs par : $\mathbf{Y}\ \mathcal{T} = (\mathcal{O}_p\|f_\gamma\|\,;\, \gamma \in \Gamma)$. C'est un élément de $[\mathcal{F}_\Gamma]$ ce qui nous assure que *chaque élément $\mathcal{O}_p\|f_\gamma\|$ est non expansif* ce que nous voulions. De plus il vérifie 3 c'est à dire : $\forall\gamma \in \Gamma$; $\forall t_1, \ldots, t_{n_\gamma} \in$ d-Termes

$$\mathcal{O}_p\|f_\gamma\|(\|t_1\|_{op}, \ldots, \|t_{n_\gamma}\|_{op}) = \|f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma})\|_{op} \tag{11}$$

3.2.2 preuves

Nous donnons dans ce paragraphe la preuve des deux résultats évoqués au paragraphe précédent

Proposition : *Si chacun des $\phi_r \in \mathcal{F}_{n_r}$ est non expansif alors il en est de même des ψ_γ définis par :*

$$\psi_\gamma(P_1, \ldots, P_{n_\gamma}) =< Term_\gamma, \sum_{r \in R_\gamma} \mathcal{T}_r(\phi_r) > (P_1, \ldots, P_{n_\gamma})$$

Intuitivement le fait d'extraire des résidus (à la profondeur 1) dans les arbres arguments multiplie la distance par au plus 2 (ce qu'exprime le lemme 1) coefficient qui va être compensé par l'opération de préfixage qui elle divise les distances par 2. C'est donc ici qu'intervient le fait que pour obtenir des opérateurs $\mathcal{O}_p\|f\|$ qui soient non expansifs il faut faire l'hypothèse qu'une action immédiate d'un système ne puisse résulter que des actions immédiates de certaines de ses composantes

lemme 1 : *Si $A=(r:\alpha)(A_1,\ldots,A_{n_\gamma})$ et si $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ sont éléments de $\mathcal{P}^{n_\gamma}$*

$$d_{max,*}(\mathcal{E}_A(\vec{P_1}),\mathcal{E}_A(\vec{P_2}))\leq 2\times d_{max}(\vec{P_1},\vec{P_2})$$

où d_{max} est la distance de $\mathcal{P}^{n_\gamma}$: $d_{max}(\vec{P_1},\vec{P_2})=\max_{1\leq i\leq n_\gamma}d(P_{1,i},P_{2,i})$

On rappelle que $\mathcal{E}_A(\vec{P_j})=\prod_{1\leq i\leq n_\gamma}R_{j,i}$ (j=1,2) avec si $i\in I_r$ $R_{j,i}=P_{j,i}(A_i)$ sinon $R_{j,i}=\{P_{j,i}\}$
S'il existe un indice i dans I_r tel que $R_{1,i}$ et $R_{2,i}$ n'aient pas le même cardinal alors $d(P_{1,i},P_{2,i})\geq 1/2$ la distance d_{max} étant majorée par 1 l'inégalité est donc nécessairement vérifiée. Supposons donc maintenant que pour tout i dans $\{1,\ldots,n_\gamma\}$ $R_{1,i}$ et $R_{2,i}$ aient le même cardinal et soit ψ_i la bijection entre ces ensembles qui réalise la distance minimale :

$$d_*(R_{1,i},R_{2,i})=\max\{d(B_i,\psi_i(B_i))\ /\ B_i\in R_{1,i}\}$$

alors :
si $i\in I_r$ $\quad d_*(R_{1,i},R_{2,i})=d_*(P_{1,i}(A_i,P_{2,i}(A_i))\leq 2\times d(P_{1,i},P_{2,i})$
si $i\notin I_r$ $\quad d_*(R_{1,i},R_{2,i})=d_*(\{P_{1,i}\},\{P_{2,i}\})=d(P_{1,i},P_{2,i})$
Dans tous les cas $\forall B_i\in R_{1,i}$ $\ d(B_i,\psi_i(B_i))\leq 2\times d(P_{1,i},P_{2,i})$ on définit alors une bijection entre $\mathcal{E}_A(\vec{P_1})$ et $\mathcal{E}_A(\vec{P_2})$ par $\psi=\prod_{1\leq i\leq n_\gamma}\psi_i$
$d_{max,*}(\mathcal{E}_A(\vec{P_1}),\mathcal{E}_A(\vec{P_2}))\leq\max\{d_{max}(\vec{B},\psi(\vec{B}))\ /\vec{B}\in\mathcal{E}_A(\vec{P_1})\}\leq\max_{1\leq i\leq n_\gamma}\max_{B_i\in R_{1,i}}d(Bi,\psi_i(B_i))$

$\leq 2\times\max_{1\leq i\leq n_\gamma}d(P_{1,i},P_{2,i})=2\times d_{max}(\vec{P_1},\vec{P_2})$

lemme 2 : *Si $\phi\in\mathcal{F}_{n_r}$ est non expansive alors $\mathcal{T}_r\phi$ est non expansive.*

Rappelons que $\mathcal{T}_r(\phi)(\vec{P})=\lambda A\,.$ [**si** $A:r$ **alors** $\phi(\mathcal{E}_A(\vec{P}))$ **sinon** $\emptyset$] et donc en utilisant l'isométrie existant entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{F}_1\mathcal{P}$:

$$\begin{array}{lll} d(\mathcal{T}_r(\phi)(\vec{P_1}),\mathcal{T}_r(\phi)(\vec{P_2})) & \leq & 1/2\max_{A\in AR\_\mathcal{P}(r)}d_*(\phi(\mathcal{E}_A(\vec{P_1})),\phi(\mathcal{E}_A(\vec{P_2}))) \\ & \leq & 1/2\max_{A\in AR\_\mathcal{P}(r)}d_{max,*}(\mathcal{E}_A(\vec{P_1})\mathcal{E}_A(\vec{P_2}))\quad \text{car } \phi \text{ est non expansive} \\ & \leq & d_{max}(\vec{P_1},\vec{P_2})\quad \text{d'apres le lemme 1} \end{array}$$

preuve de la proposition

$$\begin{array}{lll} d(\psi_\gamma(\vec{P_1}),\psi_\gamma(\vec{P_2})) & = & d(\sum_{r\in R_\gamma}\mathcal{T}_r(\phi_r)(\vec{P_1}),\sum_{r\in R_\gamma}\mathcal{T}_r(\phi_r)(\vec{P_2})) \\ & \leq & d_*(\{\mathcal{T}_r(\phi_r)(\vec{P_1})\},\{\mathcal{T}_r(\phi_r)(\vec{P_2})\})\quad \text{la somme est non expansive} \\ & \leq & \max_{r\in R_\gamma}d(\mathcal{T}_r(\phi_r)(\vec{P_1}),\mathcal{T}_r(\phi_r)(\vec{P_2}))\quad \text{en particularisant une bijection} \\ & \leq & d_{max}(\vec{P_1},\vec{P_2})\quad \text{d'apres le lemme 2} \end{array}$$

Proposition : *$\mathcal{T}_2$ est contractante de rapport 1/2 .*

lemme : *$\mathcal{T}_r$ est contractante de rapport 1/2 .*

$d(\mathcal{T}_r\phi_1, \mathcal{T}_r\phi_2) = \max_{\vec{P}\in\mathcal{P}^{n_\gamma}} d(\mathcal{T}_r\phi_1(\vec{P}), \mathcal{T}_r\phi_2(\vec{P}))$

$$\begin{aligned} d(\mathcal{T}_r(\phi_1)(\vec{P}), \mathcal{T}_r(\phi_2)(\vec{P})) &= 1/2 \max_{A\in AR\_P(r)} d_*(\phi_1(\mathcal{E}_A(\vec{P})), \phi_2(\mathcal{E}_A(\vec{P}))) \\ &\leq 1/2 \max_{A\in AR\_P(r)} \max_{\vec{Q}\in\mathcal{E}_A(\vec{P})} d(\phi_1(\vec{Q}), \phi_2(\vec{Q})) \\ &\leq 1/2 d_{sup}(\phi_1, \phi_2) \end{aligned}$$

Et donc $d(\mathcal{T}_r\phi_1, \mathcal{T}_r\phi_2) \leq 1/2\ d_{sup}(\phi_1, \phi_2)$

Preuve de la proposition
En posant $\vec{\phi_j} = (\phi_{j,r}; r \in R)$ (j=1,2) on a $d(\mathcal{T}_2(\vec{\phi_1}), \mathcal{T}_2(\vec{\phi_2})) = \max_{\gamma\in\Gamma} d(\psi_{1,\gamma}, \psi_{2,\gamma})$ avec :

$$\psi_{j,\gamma}(\vec{P}) = < Term_\gamma, \sum_{r\in R_\gamma} \mathcal{T}_r(\phi_{j,\gamma}) > (\vec{P}) \quad j = 1,2$$

$d(\psi_{1,\gamma}, \psi_{2,\gamma}) = \max_{\vec{P}\in\mathcal{P}^{n_\gamma}} d(\psi_{1,\gamma}(\vec{P}, \psi_{2,\gamma}(\vec{P}))$ et on a successivement :

$$\begin{aligned} d(\psi_{1,\gamma}(\vec{P}), \psi_{2,\gamma}(\vec{P})) &\leq d_*(\{\mathcal{T}_r(\phi_{1,\gamma})(\vec{P}); r \in R_\gamma\}, \{\mathcal{T}_r(\phi_{2,\gamma})(\vec{P}); r \in R_\gamma\}) \\ &\leq \max_{r\in R_\gamma} d(\mathcal{T}_r(\phi_{1,\gamma})(\vec{P}), \mathcal{T}_r(\phi_{2,\gamma})(\vec{P})) \\ &\leq 1/2\ d_{sup}(\phi_{1,\gamma}, \phi_{2,\gamma}) \\ &\leq 1/2\ d_{max}(\vec{\phi_1}, \vec{\phi_2}) \end{aligned}$$

3.2.3 Interprétation

A la manière de Hennessy et Plotkin [HP80] on décrit l'interprétation du langage à l'aide de trois applications :

- $\mathcal{T}\|.\|$: Termes $\longrightarrow$ (ENV $\longrightarrow \mathcal{P}$)
- $\mathcal{D}\|.\|$: DEC $\longrightarrow$ ENV_P
- $\mathcal{P}\|.\|$: PROG $\longrightarrow \mathcal{P}$

qui précisent respectivement la signification des termes, des déclarations et des programmes. L'environnement ENV = ENV_P $\times$ ENV_A admet deux composantes :

- environnement de processus : ENV_P = $\chi \longrightarrow (ENV\_A \longrightarrow \mathcal{P})$
- environnement arithmétique : ENV_A = VAR_A $\longrightarrow \mathrm{N}_\perp$

On notera $\pi\rho$ la métavariable utilisée pour le parcourir.
L'élaboration de l'interprétation consiste en trois étapes qui correspondent à la définition des trois applications citées plus haut :

- $\mathcal{T}\|.\|$ est l'application partielle définie inductivement comme suit :
  - $\mathcal{T}\|X[\rho_1]\|_{\pi\rho} = \pi(X)(\rho[\rho_1])$
  - Si $f_\rho \stackrel{def}{=} \mathcal{V}_{op}(f)(\rho) \in$ NOYAU alors :
    $\mathcal{T}\|f(t_1, \ldots, t_n\|_{\pi\rho} = \mathcal{O}_p\|f_\rho\|(\mathcal{T}\|t_1\|_{\pi\rho}, \ldots, \mathcal{T}\|t_n\|_{\pi\rho})$
  - $\mathcal{T}\|\alpha?\mathrm{x.t}\|_{\pi\rho} = < \alpha?\mathrm{x.t}, \sum_{n\in\mathrm{N}} < (ent_{\alpha,x,n} : \alpha?\mathrm{n})(t), \mathcal{T}\|t\|_{\pi,\rho\{\mathrm{n/x}\}} >$ [6]

  étant entendu que si une partie du membre droit d'une de ces équations n'est pas définie le membre gauche correspondant est lui-même non défini.

[6] abus de notation qui signifie :
$\mathcal{T}\|\alpha?\mathrm{x.t}\|_{\pi,\rho} = < \alpha?\mathrm{x.t}, \lambda A\ .$ si $\exists n \in \mathrm{N}\ .\ A = (ent_{\alpha,x,n} : \alpha?\mathrm{n})(t)$ alors $\{\mathcal{T}\|t\|_{\pi,\rho\{\mathrm{n/x}\}}\}$ sinon $\emptyset >$

- Et alors soit d=rec$(X_1, \ldots, X_n).(t_1, \ldots, t_n)$ une déclaration
Proposition : *la transformation T_d de $(ENV\_A \rightarrow \mathcal{P})^n$ dans lui même définie par :*

$$T_d = \lambda A_1 \ldots A_n \,.\, [\lambda\rho \,.\, < \mathbf{rec}_{i,\rho} : \sigma,\ \mathcal{T}\|t_i\|(\{X_i = A_i\}, \rho) >)_{i=1}^{i=n}]$$

est contractante de rapport 1/2.
Cette proposition découle immédiatement du résultat suivant :

$$d(\mathcal{T}\|t\|(\{X_i = A_i\}, \rho), \mathcal{T}\|t\|(\{X_i = B_i\}, \rho)) \leq d_{max}(\vec{A}, \vec{B})$$

qui se prouve par récurrence sur la structure de t et utilise le fait que pour tout opérateur f son interprétation $\mathcal{O}_p\|f\|$ est **non expansive.**
Soit $(S_1, \ldots, S_n) = \mathbf{Y}\ T_d$ son point fixe . On définit alors

$$\mathcal{D}\|d\| \stackrel{def}{=} \{X_i = S_i; 1 \leq i \leq n\}.$$

- Enfin $\mathcal{P}\|\mathbf{let}\ d\ \mathbf{in}\ t\| = \mathcal{T}\|t\|(\mathcal{D}\|d\|, \perp)$
où $\perp$ est l'environnement arithmétique totalement indéfini : $\forall x \in$ VAR_A $\perp(x) = \perp$. C'est à dire le sens du programme **let** *d* **in** *t* est celui du terme t dans l'environnement créé par la déclaration d.

3.2.4 preuve de pleine adéquation

La preuve de pleine adéquation du modèle dénotationnel précédemment décrit est exprimée par la proposition suivante qui indique que la dénotation d'un programme coïncide avec sa valeur opérationnelle.

Proposition : $\mathcal{P}\|\mathbf{let}\ d\ \mathbf{in}\ t\| = \|t\|_{op} = < t, \{c \in Cal_m / \ \mathbf{origine}(c) = t\} >$

Indications de preuve

Remarquons que d-Agents est le plus petit ensemble tel que :

- Si $1 \leq i \leq n$ et $\rho \in$ ENV_A tel que $Varlib_d(t_i) \subset DEF(\rho)$ alors $X_i[\rho] \in$ d-Agents
- Si $t_1, \ldots, t_{n_\gamma} \in$ d-Agents et $f_\gamma \in$ NOYAU alors $f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma}) \in$ d-Agents
- Si t $\in$ d-Termes et $Varlib_d(t) \subset \{x\}$ alors $\alpha?$x.t $\in$ d-Agents

Posons pour i tel que $1 \leq i \leq n$ et $\rho \in$ENV_A tel que Varlib$_d(t_i) \subset$ DEF(ρ)
$S_{i\rho} = \|X_i[\rho]\|_{op} = < X_i[\rho], \{c \in Cal_m / \ \mathbf{origine}(c) = X_i[\rho]\} >$
Disposant de ces ensembles $S_{i\rho}$ et de l'interprétation $\mathcal{O}_p$ des opérateurs du noyau on vérifie par récurrence sur la *hauteur* de t (en utilisant [2]) que les équations suivantes caractérisent $\mathcal{I}\|t\|$ pour t $\in$ d-Agents :

- $\mathcal{I}\|X_i[\rho]\| = S_{i\rho}$
- $\mathcal{I}\|f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma})\| = \mathcal{O}_p\|f_\gamma\|(\mathcal{I}\|t_1\|, \ldots, \mathcal{I}\|t_{n-\gamma}\|)$
- $\mathcal{I}\|\alpha?\mathrm{x.t}\| = < \alpha?\mathrm{x.t}, \sum_{n \in \mathbf{N}} < (ent_{\alpha,x,n} : \alpha?\mathrm{n})(t), \mathcal{I}\|t\{n/x\}\| >>$

On établit alors la proposition en trois étapes :

- on montre que : $\forall t \in$ d-Agents $\mathcal{I}\|t\| = \|t\|_{op} = < t, \{c \in Cal_m / \ \mathbf{origine}(c) = t\} >$
- on montre par récurrence sur la *structure* de t que : $\mathcal{T}\|t\{n/x\}\|_{\pi\rho} = \mathcal{T}\|t\|_{\pi,\rho\{n/x\}}$
et on en déduit : $\forall t \in$ d-Agents $\mathcal{I}\|t\| = \mathcal{T}\|t\|(\{X_i = S_i \stackrel{def}{=} \lambda\rho \,.\, S_{i\rho}\}, \perp)$
- On montre alors que $(S_1, \ldots, S_n)$ est le point fixe de la transformation T_d.

4 Dérivation du modèle fondamental

4.1 domaine de l'interprétation

Dans cette section nous construisons une interprétation de notre algèbre de termes dans le domaine classique des arbres de synchronisations. Cette interprétation se dérive de la précédente par l'intermédiaire d'un morphisme d'effacement qui remplace les arbres de preuve par les comportements qu'ils induisent tout en conservant la structure arborescente des processus. On montre que ce modèle peut se déduire des règles de définitions opérationnelles.
On définit une transformation naturelle $\tau : \mathcal{F}_1 \dashrightarrow \mathcal{F}_2$ entre les deux foncteurs $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ homonymes dans $\mathcal{C}'$ des foncteurs précédemment définis, par :

- $\tau c(< t, \Omega >) = \Omega$
- $\tau c(< t, \phi >) = \lambda\alpha\,.\,\mathcal{M}_f(\pi)(\sum_{A \in C_t(\alpha)} \ \phi(A))$
  où $C_t(\alpha)$ désigne l'ensemble des arbres de preuve qui établissent une transition d'origine t et induisant le comportement α (cet ensemble est fini par hypothèse sur la forme des règles)

Les foncteurs $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant continus il en résulte que le foncteur $[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]$ de $\mathbf{K}$ qu'ils définissent est continu. On peut donc définir $< \mathcal{P}, \mathcal{E}_{ff}, P > \stackrel{def}{=} \mathbf{Y}\mathcal{F}$ et $< \mathcal{P}, \mathcal{E}_{ff}, P > \cong \mathcal{F} < \mathcal{P}, \mathcal{E}_{ff}, P >$ dans $\mathbf{K}$ pour un isomorphisme I:$< \mathcal{P}, \mathcal{E}_{ff}, P > \longrightarrow \mathcal{F} < \mathcal{P}, \mathcal{E}_{ff}, P >$ tel que $<< \mathcal{P}, \mathcal{E}_{ff}, P >, I >$ soit terminal dans la catégorie des $\mathcal{F}$-algèbres. En conséquence, $\mathcal{P}$ et P sont solutions respectivement des équations $X \cong \mathcal{F}_1(X)$ et $X \cong \mathcal{F}_2(X)$ dans $\mathcal{C}$. Ainsi le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{E}_{ff}"'] & \mathcal{F}_1(\mathcal{P}) \arrow[d, "{[\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2]\mathcal{E}_{ff}}"] \\
\mathrm{P} \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{F}_2(\mathrm{P})
\end{tikzcd}$$

c'est à dire si $p =< t, \Omega >$ alors $\mathcal{E}_{ff}(p) = \Omega$ et si $p =< t, \phi >$ alors

$$\mathcal{E}_{ff}(p) = \lambda\alpha\,.\,\mathcal{E}_{ff}(\sum_{A \in C_t(\alpha)} \phi(A)) \tag{12}$$

4.1.1 Opérations sur P

On définit comme pour $\mathcal{P}$:

- **la somme finie d'éléments de P par : $\sum_{i \in I} p_i = \lambda\alpha\,.\,\sum_{i \in I} p_i(\alpha)$ (I fini). le symbole $\sum$ de la partie droite représente l'union de multi-ensembles. Cette somme est *non expansive*.**
- **L'opération de préfixage par : si $a \in E$ et $p \in P$ alors $< a, p >= \lambda\alpha.\mathbf{si}(\alpha = a)\mathbf{alors}\{p\}\mathbf{sinon}\emptyset$. Cette opération vérifie : $d(< a, p >, < a, q >) = 1/2 \times d(p, q)$**

De plus $\mathcal{E}_{ff}$ est un morphisme pour ces opérations :

- $\mathcal{E}_{ff}(\sum_{i \in I} P_i) \ = \ \sum_{i \in I} \mathcal{E}_{ff}(P_i)$
- $\mathcal{E}_{ff}(< A, P >) \ = < \mathbf{Compt}(A), \mathcal{E}_{ff}(P) >$

4.2 L'interprétation dérivée

4.2.1 L'interprétation des opérateurs du noyau

On procède ici de façon totalement similaire à ce qui a été réalisé pour le premier modèle.
On définit $F_n = P^n \to P$, muni de la distance de la convergence uniforme et $[F_n]$ le sous-ensemble constitué des applications *non expansives* de F_n . P étant complet il en est de même de F_n et de $[F_n]$ (celui-ci étant fermé dans F_n) . On note $F_\Gamma = \Pi_{\gamma\in\Gamma}\,[F_{n_\gamma}]$ et $F_R = \Pi_{r\in R}\,[F_{n_r}]$. Munis de la distance du sup ces deux espaces F_Γ et F_R sont complets. Un élément A de F_Γ est une *interprétation des opérateurs* et on notera $A\|f_\gamma\|$ pour $A(\gamma)$.
Fixons quelques notations utilisées dans la suite :

- Si $\phi \in \mathcal{F}_n$ et $\varphi \in F_n$ l'écriture $\varphi = \mathcal{E}_{ff}(\phi)$ signifie :

$$[\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad p_i = \mathcal{E}_{ff}(P_i)] \Longrightarrow \varphi(\vec{p}) = \mathcal{E}_{ff}(\phi(\vec{P}))$$

- Si $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_\Gamma$ et $A \in F_\Gamma$ l'écriture $A = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{A})$ signifie :

$$\forall\gamma\in\Gamma \quad A\|f_\gamma\| = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{A}\|f_\gamma\|)$$

(idem pour $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_R$ et $A \in F_R$)

- Si $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_\Gamma \to \mathcal{F}_R$ et $T \in F_\Gamma \to F_R$ l'écriture $T = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T})$ signifie

$$A = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{A}) \Longrightarrow TA = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}\mathcal{A})$$

(idem pour $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_R \to \mathcal{F}_\Gamma$ et $T \in F_R \to F_\Gamma$ et pour $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_\Gamma \to \mathcal{F}_\Gamma$ et $T \in F_\Gamma \to F_\Gamma$)

La construction de l'interprétation des opérateurs du noyau est présentée en deux étapes.
première étape
Etant donné $A \in F_\Gamma$ Un contexte C de CTU^n s'interprète comme un élément de F_n. Plus précisémment on lui associe $\overline{C} \in F_\Gamma \to F_n$ définie de la même façon que $\tilde{C}$:

- Si $C=[.]_k$ alors $\overline{C}(A)(\vec{p}) = \pi^n_k(\vec{p}) = p_k$
- Si $C=f_a$ ...d'arité 0....alors $\overline{C}(A)(\vec{p}) = A\|f_a\|$
- Si $C=f_a(C_1,\ldots,C_k)$ alors $\overline{C}(A)(\vec{p}) = A\|f_a\|(\overline{C_1}(A)(\vec{p}),\ldots,\overline{C_k}(A)(\vec{p})$

Par conséquent $\overline{C}$ vérifie les deux propriétés démontrées pour $\tilde{C}$:

- $\forall A \in F_\Gamma\ \forall C \in CTU^n\ \ \overline{C}(A)$ est non expansive .
- $\forall A_1, A_2 \in F_\Gamma\ \ d(\overline{C}(A_1), \overline{C}(A_2)) \leq d(A_1, A_2)$

Ainsi on peut définir $T_1 : F_\Gamma \to F_R$ par $T_1(A)(r) = \overline{C}_r(A)$ (autrement dit : $T_1 = \Pi_{r\in R}\,\overline{C}_r$)
Cette transformation vérifie donc :
Propriété : $\forall A_1, A_2 \in F_\Gamma\ \ d(T_1(A_1), T_1(A_2)) \leq d(A_1, A_2)$

Et on démontre le résultat suivant :

$$T_1 = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}_1) \tag{13}$$

deuxième étape
Si r ∈ R et $\alpha \in$ E on définit l'application $E_{r,\alpha}$ de P^{n_γ} dans $\mathcal{M}_f(P^{n_\gamma})$ par :

$$E_{r,\alpha}(\vec{p}) = \sum_{\vec{\alpha}_i\in[r,\alpha]} \prod_{i\in I_r} p_i(\alpha_i) \prod_{i\notin I_r} \{p_i\}$$

avec $[r,\alpha] = \{\vec{\alpha_i} \ / \ Cond_r(\vec{\alpha_i},\alpha)\}$
Puis on définit l'application T_r par :

$$T_r(\varphi)(\vec{p}) \ = \ \lambda\alpha \,.\, \varphi(E_{r,\alpha}(\vec{p})) \tag{14}$$

On définit la transformation T_2 de F_R dans F_Γ par $T_2(\varphi_r; r \in R) = (\psi_\gamma; \gamma \in \Gamma)$ avec

$$\psi_\gamma(p_1,\ldots,p_{n_\gamma}) = \sum_{r \in R(f_\gamma)} T_r(\varphi_r)(\vec{p})$$

le symbole $\sum$ précédent représente la somme finie d'éléments de P .
On établit $T_r = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}_r)$ (voir le paragraphe 4.2.2 pour le détail de cette preuve) et donc :

$$T_2 = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}_2) \tag{15}$$

De plus on montre de façon analogue à ce qui est réalisé pour la première interprétation :

- Si chacun des φ_r est non expansif alors il en est de même des ψ_γ
- T_2 est contractante de rapport 1/2

Ainsi $T = T_2 \circ T_1$ est contractante de rapport 1/2 dans $[F_\Gamma]$ qui est complet ; elle admet donc un unique point fixe dans $[F_\Gamma]$ notons le $\mathbf{Y}\, T$.On définit alors l'interprétation O_p des opérateurs par : $\mathbf{Y}\, T = (O_p\|f_\gamma\| \ ; \ \gamma \in \Gamma)$. C'est un élément de $[F_\Gamma]$ ce qui nous assure que *chaque élément* $O_p\|f_\gamma\|$ *est non expansif*. Les deux équations 13 et 15 nous permettent d'établir :

$$O_p = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{O}_p) \tag{16}$$

4.2.2 Preuve

Nous donnons dans ce paragraphe la preuve que $T_r = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}_r)$
Pour cela on introduit :

$$\mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P}) = \begin{cases} \phi(\mathcal{E}_A(\vec{P})) & \text{si} \quad A : r \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} \tag{17}$$

et

$$T_{r,\alpha}(\varphi)(\vec{p}) = \varphi(E_{r,\alpha}(\vec{p})) \tag{18}$$

de sorte que $\mathcal{T}_r(\phi)(\vec{P}) = \lambda A \,.\, \mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P})$ et $T_r(\varphi)(\vec{p}) = \lambda\alpha \,.\, T_{r,\alpha}(\varphi)(\vec{p})$.

lemme : *Si* $\vec{p} = \mathcal{E}_{ff}(\vec{P})$ *et* $\varphi = \mathcal{E}_{ff}\ (\phi)$ *alors* $T_{r,\alpha}(\varphi)(\vec{p}) = \mathcal{E}_{ff}(\sum_{A \in C_T(\alpha)} \mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P})$
avec $T = f_\gamma(t_1,\ldots,t_{n_\gamma})$ *dans lequel* $r \in R_\gamma$ *et* $t_i = \text{origine}(P_i)$.

Cette preuve utilise les deux propriétés suivantes portant sur la somme et le produit de multi-ensembles :

$$\sum_{a \in A}(A_a \times B) \ = \ (\sum_{a \in A} A_a) \times B \tag{19}$$

$$\sum_{(a_i; i \in I) \in \prod_{i \in I} A_i} (\prod_{i \in I} A_{a_i}) \ = \ \prod_{i \in I}(\sum_{a_i \in A_i} A_{a_i}) \quad \text{avec I fini} \tag{20}$$

La notation A_{a_i} signifie que ce multi-ensemble ne dépend que de la composante a_i d'indice i. Ces deux propriétés se vérifient sans difficulté. Vu la définition de $\varphi\mathcal{E}$ pour $\mathcal{E}$ multi-ensemble et φ

application portant sur les éléments de $\mathcal{E}$ les propriétés suivantes sont immédiates :

$$\varphi \sum_i A_i = \sum_i \varphi A_i \tag{21}$$

$$\varphi \prod_i A_i = \prod_i \varphi A_i \tag{22}$$

D'après la définition de $\mathcal{T}_{r,A}$ (équation [17]) $\sum_{A \in C_T(\alpha)} \mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P}) = \sum_{A \in C_T^r(\alpha)} \phi(\mathcal{E}_A(\vec{P}))$
où $C_T(\alpha) = \{A \in AR\_P$ / $\mathrm{Compt}(A) = \alpha$ et $\mathrm{sujet}(A) = T\}$ et $C_T^r(\alpha)$ est le sous ensemble de $C_T(\alpha)$ constitué des arbres de preuves qui correspondent à r (condition A:r).
Puisque $T = f_\gamma(t_1, \ldots, t_{n_\gamma})$
$C_T^r(\alpha) = \{(r:\alpha)(A_1, \ldots, A_{n_\gamma})$ / $\mathrm{Compt}(A_i) = \alpha_i$, $\mathrm{sujet}(A_i) = t_i$ *et* $Cond_r(\vec{\alpha_i}, \alpha)\}$
autrement dit :

$$C_T^r(\alpha) = \{(r:\alpha)(A_1, \ldots, A_{n_\gamma}) \ / \ (A_i, i \in I_r) \in \bigcup_{\vec{\alpha_i} \in [r,\alpha]} \prod_{i \in I_r} C_{t_i}(\alpha_i) \ \ et \ \ \forall i \notin I_r \ \ A_i = t_i\}$$

Et, de cette façon :

$$\sum_{A \in C_T^r(\alpha)} \phi(\mathcal{E}_A(\vec{P})) = \sum_{\vec{\alpha_i} \in [r,\alpha]} (\sum_{\vec{A_i} \in \prod_{1 \le i \le n_\gamma} \mathcal{A}_i} \phi(\mathcal{E}_{(r:\alpha)(A_1, \ldots, A_{n_\gamma})}(\vec{P})))$$

avec si $i \in I_r$ $\mathcal{A}_i = C_{t_i}(\alpha_i)$ et si $i \notin I_r$ $\mathcal{A}_i = \{t_i\}$ or :

$$\phi(\mathcal{E}_{(r:\alpha)(A_1, \ldots, A_{n_\gamma})}(\vec{P})) = \prod_{i \in I_r} \phi(P_i(A_i)) \prod_{I \notin I_r} \phi(\{P_i\})$$

et donc en utilisant l'équation [20] il vient :

$$\sum_{A \in C_T^r(\alpha)} \phi(\mathcal{E}_A(\vec{P})) = \sum_{\vec{\alpha_i} \in [r,\alpha]} [\prod_{i \in I_r} (\sum_{A_i \in C_{t_i}(\alpha_i)} \phi(P_i(A_i))) \prod_{i \notin I_r} \phi(\{P_i\})]$$

puis en utilisant l'équation [19] :

$$\sum_{A \in C_T^r(\alpha)} \phi(\mathcal{E}_A(\vec{P})) = \sum_{\vec{\alpha_i} \in [r,\alpha]} [\prod_{i \in I_r} (\sum_{A_i \in C_{t_i}(\alpha_i)} \phi(P_i(A_i)))] \prod_{i \notin I_r} \phi(\{P_i\})$$

Et, par conséquent :

$$\mathcal{E}_{ff}(\sum_{A \in C_T(\alpha)} \mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P})) = \sum_{\vec{\alpha_i} \in [r,\alpha]} [\prod_{i \in I_r} \mathcal{E}_{ff}(\sum_{A_i \in C_{t_i}(\alpha_i)} \phi(P_i(A_i)))] \prod_{i \notin I_r} \mathcal{E}_{ff}(\phi(\{P_i\}))$$

D'après l'équation [12] puisque $p_i = \mathcal{E}_{ff}(P_i)$ il découle que :

$$p_i(\alpha_i) = \mathcal{E}_{ff}(\sum_{A_i \in C_{t_i}(\alpha_i)} P_i(A_i))$$

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{ff}(\textstyle\sum_{A_i \in C_{t_i}(\alpha_i)} \phi(P_i(A_i))) &= \mathcal{E}_{ff}(\phi \textstyle\sum_{A_i \in C_{t_i}(\alpha_i)} P_i(A_i)) && \text{d'apres [21]} \\
&= \varphi \mathcal{E}_{ff}(\textstyle\sum_{A_i \in C_{t_i}(\alpha_i)} P_i(A_i)) && \text{car } \varphi = \mathcal{E}_{ff}(\phi) \\
&= \varphi p_i(\alpha_i) && \text{car } p_i = \mathcal{E}_{ff}(P_i)
\end{aligned}$$

De même $\mathcal{E}_{ff}(\{\phi(P_i)\}) = \{\varphi(p_i)\}$ car $p_i = \mathcal{E}_{ff}(P_i)$ et $\varphi = \mathcal{E}_{ff}(\phi)$ et donc :

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{E}_{ff}(\sum_{A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(\alpha)} \mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P})) & = & (\sum_{\vec{\alpha_i} \in [r:\alpha]} [\prod_{i \in I_r} \varphi(p_i))])(\prod_{i \notin I_r} \{\varphi(p_i)\}) & \\ & = & \sum_{\vec{\alpha_i} \in [r:\alpha]} (\prod_{i \in I_r} \varphi(p_i(\alpha_i)) \prod_{i \notin I_r} \{\varphi(p_i)\}) & \text{d'apres [19]} \\ & = & \varphi(\sum_{\vec{\alpha_i} \in [r:\alpha]} \prod_{i \in I_r} p_i(\alpha_i) \prod_{i \notin I_r} \{p_i\}) & \text{d'apres [21] et[22]} \\ & = & T_{r,\alpha}(\varphi)(\vec{p}) & \text{d'apres [18]} \end{array}$$

Proposition : $T_r = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}_r)$

Sous les hypothèses $\varphi = \mathcal{E}_{ff}(\phi)$ et $\vec{p} = \mathcal{E}_{ff}(\vec{P})$ il faut donc établir que :

$$T_r(\varphi)(\vec{p}) = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}_r(\phi)(\vec{P}))$$

Or $\mathcal{T}_r(\phi)(\vec{P}) = \lambda A \,.\, \mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P})$ et d'après le précédent lemme :

$$T_r(\varphi)(\vec{p}) = \lambda\alpha \,.\, T_{r,\alpha}(\varphi)(\vec{p}) = \lambda\alpha \,.\, \mathcal{E}_{ff}(\sum_{A \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}(\alpha)} \mathcal{T}_{r,A}(\phi)(\vec{P}))$$

Et le résultat découle immédiatement de la formule [12]

4.2.3 L'interprétation dérivée des termes et programmes

L'environnement ENV = ENV_P $\times$ ENV_A admet deux composantes :

- environnement de processus : ENV_P = $\chi \longrightarrow (ENV\_A \longrightarrow P)$
- environnement arithmétique : ENV_A = VAR_A $\longrightarrow \mathbf{N}_\perp$

On notera $\pi\rho$ la métavariable utilisée pour le parcourir.
L'élaboration de l'interprétation consiste en trois étapes qui correspondent à la définition des trois applications suivantes :

- $T\|.\|$: Termes $\longrightarrow$ (ENV $\longrightarrow P$)
  est l'application partielle définie inductivement comme suit :
  - $T\|X[\rho_1]\|_{\pi\rho} = \pi(X)(\rho[\rho_1])$
  - Si $f_\rho \stackrel{def}{=} \mathcal{V}_{op}(f)(\rho) \in$ NOYAU alors :
    $T\|f(t_1, \ldots, t_n\|_{\pi\rho} = O_p\|f_\rho\|(T\|t_1\|_{\pi\rho}, \ldots, T\|t_n\|_{\pi\rho})$
  - $T\|\alpha?\mathrm{x.t}\|_{\pi\rho} = \sum_{n \in \mathbf{N}} < \alpha?\mathrm{n}, T\|t\|_{\pi,\rho\{\mathrm{n/x}\}} >$ [7]

  étant entendu que si une partie du membre droit d'une de ces équations n'est pas définie le membre gauche correspondant est lui-même non défini.

- $D\|.\|$: DEC $\longrightarrow$ ENV_P
  soit d=**rec**$(X_1, \ldots, X_n).(t_1, \ldots, t_n)$ une déclaration ; la transformation T_d de (ENV_A $\rightarrow P)^n$ dans lui même définie par :
  $T_d = \lambda A_1 \ldots A_n \,.\, [(\lambda\rho \,.\, < \sigma \,,\, T\|t_i\|(\{X_i = A_i\}, \rho) >)_{i=1}^{i=n}]$ est contractante de rapport 1/2.
  Soit $(S_1, \ldots, S_n) = \mathbf{Y}\, T_d$ son point fixe . Alors on définit $D\|.\|$ par :
  $D\|d\| \stackrel{def}{=} \{X_i = S_i; 1 \leq i \leq n\}$.

- $P\|.\|$: PROG $\longrightarrow P$
  définie par $P\|\mathbf{let}\ d\ \mathbf{in}\ t\| = T\|t\|(\mathcal{D}\|d\|, \perp)$
  où $\perp$ est l'environnement aritmétique totalement indéfini : $\forall x \in$ VAR_A $\perp(x) = \perp$.

[7] abus de notation qui signifie :
$T\|\alpha?\mathrm{x.t}\|_{\pi,\rho} = \lambda\alpha$. si $\exists n \in \mathbf{N} \,.\, a = \alpha?\mathrm{n}$ alors $\{T\|t\|_{\pi,\rho\{\mathrm{n/x}\}}\}$ sinon $\emptyset$

La proposition suivante établit la pleine adéquation de l'interprétation dérivée.

Proposition : P|| let d in t || $= \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{P}\|\mathbf{let}\ d\ \mathbf{in}\ t\|)$

indication de preuve
On définit $D \stackrel{def}{=} \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{D}\|d\|)$ ce qui signifie : $\forall X \in \chi \quad D(X) = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{D}\|d\|(X))$. En utilisant l'équation [16] il vient, par récurrence sur la structure de t, que $T\|t\|(D, \perp) = \mathcal{E}_{ff}(\mathcal{T}\|t\|(\mathcal{D}\|d\|, \perp))$. On vérifie enfin que $D = \{X_i = S_i\}$ avec $(S_1, \ldots, S_n) = \mathbf{Y}T_d$.

5 CONCLUSION

Deux approches sont couramment utilisées pour décrire une sémantique dénotationnelle ; la première basée sur les CPOs fait appel au théorème de Tarski et la seconde utilise des espaces métriques complets et le théorème du point fixe de Banach . L'utilisation de la topologie métrique préconisée par Nivat ([AN78]) et reprise largement depuis (cf. par exemple : [CD85] [dBZ82] [GR83] [Rou84]) est celle qu'on a privilégiée dans ce travail où toutes les constructions reposent, en effet, exclusivement sur la structure métrique.
Nous nous attachons à construire de façon systématique des sémantiques comportementales de langages de programmation de systèmes réactifs. Ce travail en constitue une première partie et montre qu'à partir de définitions opérationnelles on peut associer des systèmes d'équations dont on sait qu'ils admettent une solution unique dans le modèle proposé. Nous essayerons, par la suite, de construire d'autres modèles par l'utilisation systématique de morphismes d'abstraction. Ceux-ci ne préservent généralement pas cette propriété d'unicité des points fixes, la caractérisation de la solution nécessite alors l'utilisation d'une structure ordonnée plus souple que la structure métrique, ce qui justifie son introduction dans les deux modèles construits.
Nous avons vu que la théorie des catégories nous procure un cadre bien adapté pour dériver un modèle à partir d'un autre. Cependant dans le cas étudié le morphisme de modèle utilisé était continu pour la topologie métrique ce qui conjugué avec l'unicité des points fixes résolvait notre problème. Si cela n'est plus le cas on peut soit tenter d'affiner la topologie afin de se retrouver dans ce cas soit rechercher une condition plus faible que la continuité mais qui est suffisante pour le but fixé.

Bibliographie

[AN78] A. Arnold and M. Nivat. The metric space of infinite trees . algebraic and topological properties. *Fund. Inform III*, 4, 1978.

[CD85] G. Comyn and M. Dauchet. *Metric approximations in ordered domains.* in Algebraic methods in semantics, Cambridge Univ. Press, 1985.

[dBK85] J.W. de Bakker and J.N. Kok. Towards a uniform topological treatment of streams and functions on streams. *Proceedings of the 12 th ICALP, Springer LNCS*, 194, 1985.

[dBMO85] J.W. de Bakker, J.J.Ch. Meyer, and E.R. Olderog. Infinite streams and finite observations in the semantics of uniform concurrency. *Proceedings of the 12 th ICALP, Springer LNCS*, 194, 1985.

[dBZ82] J.W. de Bakker and J.I. Zucker. Processes and the denotational semantics of concurrency. *Information and Control*, 54, 1982.

[DG87a] Ph. Darondeau and B. Gamatié. A fully observational model for infinite behaviours of communicating systems. *CAAP 87, Springer LNCS*, 249, 1987.

[DG87b] Ph. Darondeau and B. Gamatié. Modelling infinitary behaviours of communicating systems. october 1987.

[dS84] Robert de Simone. *Calculabilité et expressivité dans l'algèbre de processus MEIJE.* Thèse de 3eme Cycle, Paris VII, 1984.

[GR83] W. Golson and W.C. Rounds. Connection between two theories of concurrency : metric spaces and synchronization trees. *Information and Control*, 57, 1983.

[HP80] M.C.B. Hennessy and G. Plotkin. A term model for ccs. *Springer Verlag LNCS*, 99, 1980.

[Lan71] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer Verlag, GIM 5, 1971.

[Mil80] Robin Milner. *A calculus of communicating systems.* Springer Verlag LNCS, n 92, 1980.

[Plo77] Gordon Plotkin. Lcf considered as a programming language. *Theoret. Comp. Scien.*, 5(3), 1977.

[Plo81] Gordon Plotkin. *A structural approach to operational semantics.* Rep Daimi FN 19, Aarhus Univ., 1981.

[Rou84] William C. Rounds. On the relationships between scott domains, synchronization trees and metric spaces. *Information and Control*, 66, 1984.

[SP82] Smyth and Plotkin. The category-theoretic solution of recursive domain equations. *Siam J. Compt.*, 11(4), novembre 1982.

[Wan79] M. Wand. Fixed-point construction in order-enriched categories. *Theoret. Comp. Sci.*, 8, 1979.

Imprimé en France
par
l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique